Elektrodinamika

1. Tétel :

Az elektrodinamika hullámegyenletei

$\underline{E}(\underline{x},t)$ - elektromos térerősség , $\rho(\underline{x},t)$ - töltéssűrűség

$\underline{B}(\underline{x},t)$ - mágneses indukcióvektor , $\underline{j}(\underline{x},t)$ - áramsűrűség

→ Lokalitás

→ Maxwell egyenletek: (vákuumban)

$$\boxed{\begin{array}{l|r} \operatorname{div}\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho & \operatorname{div}\underline{B} = 0 \\ \operatorname{rot}\underline{E} = -\frac{\partial\underline{B}}{\partial t} & \operatorname{rot}\underline{B} = \mu_0\underline{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\underline{E}}{\partial t} \end{array}}$$

→ töltésmegmaradás:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \operatorname{div}\frac{\partial\underline{E}}{\partial t} \overset{\operatorname{rot}\underline{B}}{\overset{\downarrow}{=}} \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\underline{B} - \underline{j}\right) \quad ; \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\underline{j}}$$

→ Mivel $\operatorname{div}\underline{B} = 0$ → $\underline{B}(\underline{x},t) = \operatorname{rot}\overset{\text{vektorpotenciál}}{\underline{A}}(\underline{x},t)$

→ rot E-be beírva:

$$\operatorname{rot}\left(\underline{E} + \frac{\partial\underline{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\underline{E} + \frac{\partial\underline{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\phi(x,t)}$$

→ div $\underline{E}$ -be és rot $\underline{B}$-be leírva: → **Hullámegyenletek**:

$$\boxed{\begin{aligned} &-\Delta\phi - \mathrm{div}\,\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ &\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{A} = \mu_0 \underline{j} - \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \mathrm{grad}\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \end{aligned}}$$

→ Mértékinvariancia:

$\boxed{\underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}\Lambda(\underline{x},t)}$, ahol $\Lambda(\underline{x},t)$ skalárfüggvény, szabadon választott

$$\mathrm{rot}\,\underline{A}' = \underline{B}' = \mathrm{rot}\,\underline{A} + \underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\Lambda}_{0} = \mathrm{rot}\,\underline{A} = \underline{B}$$

$$\boxed{\phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}}$$

→ Coulomb-mérték: $\boxed{\mathrm{div}\,\underline{A} = 0}$

(sztatikus)

Itt a hullámegyenletek:

$$\boxed{\Delta\phi_C = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \longmapsto \quad \phi_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \, \frac{\rho(\underline{x}',t)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}}$$

rot rot = grad div − Δ

$$\boxed{-\Delta\underline{A}_c + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 A_c}{\partial t^2} = \mu_0\underline{j} - \mu_0\varepsilon_0\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial\phi_c}{\partial t}}$$

→ D'Alambert operátor: $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$,

$$\Box = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \Box}$$

→ $\boxed{\Box \underline{A}_C = \mu_0 \underline{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \, \text{grad} \, \frac{\partial \phi_C}{\partial t}}$

→ Lorentz-mérték: $\boxed{\text{div} \, \underline{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0}$

$$-\text{div} \, \dot{\underline{A}} = \frac{1}{c^2} \ddot{\phi}$$

$$\boxed{-\Delta \phi_L + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial t^2} = \Box \phi_L = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho}$$

$$-\Delta \underline{A}_L + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{A}_L}{\partial t^2} = \mu_0 \underline{j} \underbrace{- \frac{1}{c^2} \text{grad} \frac{\partial \phi_L}{\partial t} - \text{grad div} \, \underline{A}_L}_{-\text{grad}\left(\text{div} \, \underline{A}_L + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)}$$

$$\boxed{\Box \underline{A}_L = \mu_0 \underline{j}}$$

→ kettő együtt: $\boxed{\Box \begin{pmatrix} \phi \\ \underline{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \mu_0 \underline{j} \end{pmatrix}}$

→ Megmaradási tételek elektromechanikai rendszerekre (2. Tétel eleje)

→ Lorentz-erő:

$$f(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)\cdot\underline{E}(\underline{x},t) + j(\underline{x},t)\times\underline{B}(\underline{x},t)$$

$$\boxed{f = \rho\underline{E} + j\times\underline{B}}$$

$$j = \underline{v}\rho \quad , \quad \underline{v} = \underline{v}(\underline{x},t)$$

→ munkát ebből csak az első tag fog végezni

$$\boxed{\frac{dE_{mech}}{dt} = \int_V d^3x\, \underline{v} f = \int_V d^3x\, \underline{v}\rho\underline{E} = \int_V d^3x\, j\,\underline{E}}$$

j-t a rot B-s Maxwellből beírva: $\dfrac{dE_{mech}}{dt} = \int_V d^3x \left[\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\underline{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\underline{E}}{\partial t}\right]\underline{E}$

$$\frac{dE_{mech}}{dt} \underset{\uparrow}{=} -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{d}{dt}\int_V d^3x\, \underline{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\frac{d}{dt}\int_V d^3x\, \underline{B}^2 - \frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x\, \mathrm{div}(\underline{E}\times\underline{B})$$

Felhasználva, hogy:

$$\int d^3x\, \underline{E}\,\mathrm{rot}\,\underline{B} = \int d^3x\, E_i\varepsilon_{ijk}\partial_j B_k = \int d^3x \left[\underbrace{\partial_j(\varepsilon_{ijk}E_iB_k)}_{-\mathrm{div}(\underline{E}\times\underline{B})} - \varepsilon_{ijk}B_k\partial_j E_i\right]$$

$$B_k\varepsilon_{kij}\partial_j E_i = (\mathrm{rot}\,\underline{E})_k B_k \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{2}\frac{d\underline{B}^2}{\partial t}$$

rot E-s Maxwellből

Így:

$$\int d^3x\, \underline{E}\,\mathrm{rot}\,\underline{B} = -\int d^3x \left[\mathrm{div}(\underline{E}\times\underline{B}) + \frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial t}\right]$$

$$\boxed{\varrho_{energia} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\underline{B}^2\right)}$$

$$\boxed{E_{em} = \int_V d^3x\, \varrho_{energia}(\underline{x},t)}$$

$$\boxed{\underline{j}_{energia} = \frac{1}{\mu_0}\underline{E}\times\underline{B} = \underline{S}}$$ Poynting-vektor

Beírva:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(E_{mech}+E_{em}\right)_V + \overbrace{\int d\underline{F}\, \overset{\underline{S}}{\underline{j}_{energia}}}^{\frac{1}{\mu_0}\int_V d^3x\, \mathrm{div}\,\underline{E}\times\underline{B}\ \downarrow \text{Gauss}} = 0}$$ Mérlegegyenlet

→ Impulzus megmaradás:

$$\frac{d\, p^{(V)}_{mech}}{dt} = \int_V d^3x\left(\varrho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B}\right)$$

→ minden komponensre teljesül

→ tenzoriális megmaradási mennyiség

ϱ div$\underline{E}$-ből ↙ $\quad$ $\underline{j}$ rot $\underline{B}$-ből ↙

$$\frac{dp_i}{dt} = \int_V d^3x\left[\varepsilon_0 E_i \partial_j E_j + \varepsilon_{ijk}\left(\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\underline{B} - \varepsilon_0\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}\right)_j B_k\right] =$$

← teljes derivált

$$= \int_V d^3x\Big[\underbrace{\varepsilon_0 E_i\partial_j E_j}_{\sim} + \frac{1}{\mu_0}\varepsilon_{ijk}\underbrace{\left(\varepsilon_{jmn}\partial_m B_n\right)}_{\sim}B_k \underline{- \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_{ijk}E_jB_k\right) +}$$

$$+\underbrace{\varepsilon_0\varepsilon_{ijk}E_j\frac{\partial B_k}{\partial t}}_{\sim}$$

↓ ezt teljes rottá alakítjuk

→ − átmegy

~ marad

de $-\frac{\partial B_k}{\partial t} = (\text{rot}\,\underline{E})_k$, így:

$$\boxed{\underline{p}^{(em)} = \frac{1}{c^2}\underline{S}}$$

bővítés

$$\frac{dp_i^{(mech)}}{dt} + \frac{d}{dt}\int_V d^3x\, \overbrace{\varepsilon_0\mu_0}^{\frac{1}{c^2}} \cdot \frac{1}{\mu_0}(\underline{E}\times\underline{B})_i =$$

$$= \int_V d^3x\, \varepsilon_0 E_i \partial_j E_j - \varepsilon_0 \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} E_j \partial_m E_n -$$

$$\underbrace{- \frac{1}{\mu_0}\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{jmn} B_k \partial_m B_n + \frac{1}{\mu_0}\underbrace{B_i \partial_j B_j}}$$

0, mert div $\underline{B} = 0$
→ leírjuk, mert ezzel teljes div

→ Nézzük most csak a B_i-s tagokat, E-re szimmetrikus eljárás.

Ismert: $\varepsilon_{jik}\varepsilon_{jmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$, ezzel levit szétvegyük:

$$\frac{1}{\mu_0}\left[B_i\partial_j B_j - B_k \partial_i B_k + B_k\partial_k B_i\right]$$

Nekünk teljes divergencia kell:

$$\underline{\partial_j \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{2}B_k^2\delta_{ij} - B_iB_j\right]} = \frac{1}{\mu_0}\left[\underbrace{B_k\partial_j B_k\delta_{ij}}_{B_k\partial_i B_k} - B_j\partial_j B_i - B_i\partial_j B_j\right]$$

Vezessük be a Maxwell-féle feszültség tenzort:

$$\boxed{T_{ij} = \varepsilon_0\left(\frac{1}{2}\underline{E}^2\delta_{ij} - E_iE_j\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\underline{B}^2\delta_{ij}\frac{1}{2} - B_iB_j\right)}$$

$$\underline{\underline{\Pi}} = \varepsilon_0\left(\frac{1}{2}E^2\,\underline{\underline{1}} - \underline{E}\circ\underline{E}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{2}B^2\,\underline{\underline{1}} - \underline{B}\circ\underline{B}\right)$$

Ezzel:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[p_i^{(mech)} + \int_{V} d^3x\, \underset{\downarrow\ \frac{1}{c^2}\underline{S}}{p^{(em)}}\right] + \overbrace{\int d\underline{F}\,\underline{\underline{\Pi}}}^{\int d^3x\ \mathrm{div}\,\underline{\underline{\Pi}}} = 0}$$

1. Tétel: Hullámegyenlet megoldása Green-függvényes eljárással.

Feladat: $\Box_{\underline{x},t}\, f(\underline{x},t) = \underline{S}(\underline{x},t)$

megoldás = inhomogén partikuláris megoldása + homogén általános megoldása

→Homogén megoldás:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) f(\underline{x},t) = 0$$

síkhullám megoldás: $\boxed{e^{i\underline{k}\underline{x}-i\omega t} = f}$. Beírva:

$$+\left(\frac{-\omega^2}{c^2} + k^2\right) e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)} = 0$$

$$\boxed{\omega(\underline{k}) = c|\underline{k}| = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}|\underline{k}|}$$

Diszperziós reláció

→ Tehát a homogén megoldás (hullámcsomagra):

$$\boxed{f_{hom}(\underline{x},t) = \int e^{i\underline{q}\underline{x} - i\omega(\underline{q})t}\, \tilde{f}(\underline{q})\, \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}}$$

t=0-ban: $f(\underline{x},0) = \int e^{i\underline{q}\underline{x}}\, \tilde{f}(\underline{q})\, \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}$ (K7)

$$\tilde{f}(\underline{q}) = \int d^3x\, e^{-i\underline{q}\underline{x}}\, f_{hom}(\underline{x},0)$$

→ csoportsebesség:

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dq}\Big|_{q_0} = c}$$

→ f valós fgv → megszorítás:

$$\boxed{\tilde{f}^*(\underline{q}) = \tilde{f}(-\underline{q})}$$

→ Partikuláris megoldások:

→ megoldások lin. kombja: $\left.\begin{array}{l} f_1 \to s_1 \\ f_2 \to s_2 \end{array}\right\} \alpha s_1 + \beta s_2 \to \alpha f_1 + \beta f_2$

→ Ilyen alakban keressük:

$$\boxed{f(\underline{x},t) = \int d^3x' \int dt'\, G(\underline{x},t|\underline{x}',t')\, s(\underline{x}',t')}$$

Beírva:

$$\int d^3x' \int dt' \left(\Box_{\underline{x},t}\, G(\underline{x},t \mid \underline{x}',t') \right) s(\underline{x},t') =$$

$$= \int d^3x' \int dt'\, \delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}')\, \delta(t-t')\, s(\underline{x}',t')$$

δ defin:

$$\boxed{\Box_{\underline{x},t}\, G(\underline{x},t \mid \underline{x}',t') = \delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}')\,\delta(t-t')}$$

↳ $G(\underline{x},t \mid \underline{x}',t')$-t keresem → jobb volna, ha különbség volna

→ Fourier-előállítás:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi}\, \tilde{f}(q)\, e^{iqx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x')\, e^{-iqx'} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iq(x-x')}}_{\delta(x-x')}$$

ez alapján:

$$\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}')\,\delta(t-t') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\underline{q}(\underline{x}-\underline{x}') - i\omega(t-t')}$$

$$G(\underline{x}-\underline{x}', t-t') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\underline{q}(\underline{x}-\underline{x}') - i\omega(t-t')}\, \tilde{G}(\underline{q},\omega)$$

$$\Box_{\underline{x},t}\, G(\underline{x}-\underline{x}', t-t') = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \underbrace{\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + q^2 \right)}_{\text{homogénnél láttuk}} \tilde{G}(\underline{q},\omega) \cdot e^{i\underline{q}(\underline{x}-\underline{x}') - i\omega(t-t')}$$

↑ de láttuk, hogy ez egy halom δ, így

$$\boxed{\tilde{G}(\underline{q},\omega) = \frac{1}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}$$ → $\omega = \pm|\underline{q}|c$ helyen pólus

→ Kauzalitási megszorítás

→ retardált megoldás:

$$\boxed{G_{ret}(\underline{x}-\underline{x}', t-t') = 0, \text{ ha } t'>t}$$

Ekkor: (csak a problémás részt nézve):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \left(\frac{1}{\omega+cq} - \frac{1}{\omega-cq}\right)\left(\frac{c}{2q}\right) = I$$

→ megoldás Cauchy-tétel segítségével:

→ ω-t kiterjesztjük a cplx síkra

→ ha $t<t'$ ⌒ integrál

→ ha $t'<t$ ⌣ integrál

$$\boxed{\text{Cauchy-tétel: } \oint_C dz \frac{r(z)}{z-z_0} = 2\pi i\, r(z_0)}$$ ahol $z_0 \in \mathbb{C}$, r → reziduum

→ két pólust $i\varepsilon$-nal eltoljuk

→ kauzalitás miatt: $\boxed{\omega \to \omega + i\varepsilon}$, $\omega = \pm cq$ jön be,

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i(\omega+i\varepsilon)(t-t')} \left(\frac{1}{\omega+cq+i\varepsilon} - \frac{1}{\omega-cq+i\varepsilon}\right)\left(\frac{c}{2q}\right) \overset{\text{mint res}}{=}$$

$$I = \frac{-c}{2q\cdot 2\cancel{\pi}}\cdot 2\cancel{\pi} i\left(e^{icq(t-t')} - e^{-icq(t-t')}\right)$$

Így a keresett Green-fgv:

$$\boxed{G_{ret}(\underline{x}-\underline{x}', t-t') = \begin{cases} 0, & \text{ha } t<t' \\ -\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\underline{q}(\underline{x}-\underline{x}')} \frac{ic}{2q}\left[e^{icq(t-t')} - e^{-icq(t-t')}\right], & \text{ha } t>t' \end{cases}}$$

→ Transzformáció gömbi polárba:

$$\to d^3q = dq_x dq_y dq_z = q^2\, dq\, d\cos\Theta_q\, d\varphi_q$$

$\to \underline{x}-\underline{x}'$ z tengely irányú

$$G_{ret} = -\int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi_q}_{2\pi} \int_{-1}^{1} d\cos\Theta_q\, e^{iq|\underline{x}-\underline{x}'|\cos\Theta_q}[\dots]\cdot\frac{ic}{2q} =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{\cancel{q^2}\, dq}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{\cancel{i}q|\underline{x}-\underline{x}'|}\left(e^{iq|\underline{x}-\underline{x}'|} - e^{-iq|\underline{x}-\underline{x}'|}\right)\frac{\cancel{i}c}{2\cancel{q}}\cdot$$

$$\cdot\left(e^{icq(t-t')} - e^{-icq(t-t')}\right) =$$

$$= -\frac{c}{8\pi^2}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\int_0^\infty dq\left[e^{iq(|\underline{x}-\underline{x}'|+c(t-t'))} - e^{iq(|\underline{x}-\underline{x}'|-c(t-t'))} - e^{-iq(|\underline{x}-\underline{x}'|-c(t-t'))} + e^{-iq(|\underline{x}-\underline{x}'|+c(t-t'))}\right] =$$

→ vegyük észre, hogy ez k-nak páros fgv-je, azaz

$$\int_0^\infty = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}$$

→ és hogy tele van δ-val: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{iky}=\delta(y)$

→ integrálok párban vannak

$$= \frac{-2c}{8\pi|\underline{x}-\underline{x}'|}\left(\delta\left(\underbrace{|\underline{x}-\underline{x}'|+c(t-t')}_{\text{ez sehol nem tud eltűnni, ezért az egész 0.}}\right)-\delta\left(|\underline{x}-\underline{x}'|-c(t-t')\right)\right)=$$

itt $a=-1$

Ismerjük korábbról, hogy $\delta(ay)=\frac{1}{|a|}\delta(y)$, így:

$$=\boxed{\frac{1}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}'|}\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)=G_{ret}}$$

→ A partikuláris megoldás:

$$\varphi_{part}=\varphi_{ret}(\underline{x}-\underline{x}',t-t')=\int d^3x'\int dt'\,G_{ret}(\underline{x}-\underline{x}',t-t')\,s(\underline{x}',t')=$$

$$=\int d^3x'\int dt'\frac{1}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}'|}\delta\left(t\underbrace{-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}}_{t'\text{-t cseréli}}\right)s(\underline{x}',t')=$$

$$\boxed{\varphi_{part}=\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}s\left(\underline{x}',t-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)}$$

→ Avanzsált Green-fgv.:

→ $\omega \to \omega - i\varepsilon$ -t helyettesítünk

$G_{av} = 0$, ha $t > t'$

$$\boxed{G_{av}(\underline{x}-\underline{x}', t-t') = \begin{cases} 0 & , \quad t > t' \\ \frac{1}{4\pi|\underline{x}-\underline{x}'|}\delta\left(t-t'+\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right), & t < t' \end{cases}}$$

$$\boxed{f_{av} = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{1}{|x-x'|} s\left(\underline{x}', t+\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)}$$

→ Általános Green-fgv:

$$\boxed{\alpha G_{av} + \beta G_{ret} = G}$$

→ Határozott frekvenciával rezgő forrás esete:

$s(\underline{x},t) = s_\omega(\underline{x})\, e^{-i\omega_0 t}$, ahol ω_0 határozott

→ retardált megoldást nézzük:

$$f_{\omega,ret}(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} s_\omega(\underline{x}')\, e^{-i\omega_0\left(t-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)} =$$

$$= f_{\omega,ret}(\underline{x})\, e^{-i\omega_0 t}$$

$$\sim \int e^{-i\omega_0\left(t-\frac{|x-\underline{x}'|}{c}\right)} \frac{1}{|x-\underline{x}'|} d^3x' \sim \frac{e^{i\frac{\omega_0}{c}|\underline{x}|}}{|x|},$$ ha $|x| \gg d \geq |\underline{x}'|$,

sorfejtettünk

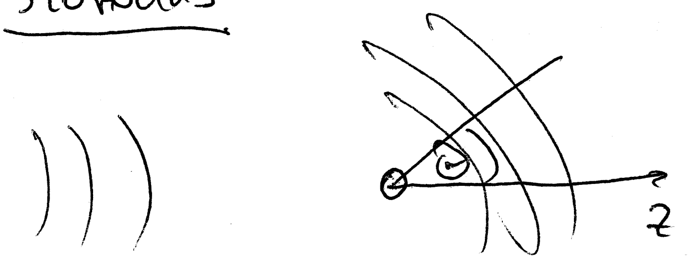
$\frac{\omega_0}{c} = \varrho_0$ -t írva

$$\sim \frac{e^{-i\varrho_0 r - i\omega_0 t}}{r} \Rightarrow \text{gömbhullám}$$

retardált megoldás ⇝ forrásból kifelé haladó gömbhullámot ad

avanzsált → befelé haladót

→ Szóródás



Θ alatt kimenő intenzitás érdekel

differenciális hatáskeresztmetszet: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dI(\Theta)}{I_{be}\, d\Omega}$

→ retardált Green-fgv-vel:

Határozott frekvenciájú esetben:

$\varrho(\underline{x},t) = \varrho_\omega(\underline{x})e^{-i\omega t}$

$\underline{j}(\underline{x},t) = \underline{j}_\omega(\underline{x})e^{-i\omega t}$

→ A Maxwell-egyenletek ekkor:

$$\operatorname{div}\underline{E}(\underline{x},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\underline{x},t) \rightarrow \boxed{\underline{E}(\underline{x},t) = \underline{E}_\omega e^{-i\omega t}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\operatorname{div}\underline{E}_\omega(\underline{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho_\omega(\underline{x})}$$

$$\rightarrow \text{rot}\, \underline{E}(\underline{x},t) = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\underline{B}(\underline{x},t) = \underline{B}_\omega(\underline{x})\, e^{-i\omega t}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{rot}\, \underline{E}_\omega(\underline{x}) = i\omega\, \underline{B}_\omega(\underline{x})}$$

$$\rightarrow \boxed{\text{div}\, \underline{B}(\underline{x},t) = 0}$$

$$\rightarrow \text{rot}\, \underline{B}(\underline{x},t) = \mu_0\, \underline{j}(\underline{x},t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}(\underline{x},t)}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{rot}\, \underline{B}_\omega(\underline{x}) = \mu_0\, \underline{j}_\omega(\underline{x}) - \mu_0 i\omega \varepsilon_0\, \underline{E}_\omega(\underline{x})}$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{B}_\omega(\underline{x}) = \text{rot}\, \underline{A}_\omega(\underline{x})}$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{E}_\omega(\underline{x}) - i\omega\, \underline{A}_\omega(\underline{x}) = -\underline{\nabla}\, \phi_\omega(\underline{x})}$$

→ Lorentz-mérték esetén:

$$\text{div}\, \underline{A}_\omega(\underline{x}) - \frac{i\omega}{c^2}\phi_\omega(\underline{x}) = 0$$

$$\Box \begin{pmatrix} \phi(\underline{x},t) \\ \underline{A}(\underline{x},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{x},t) \\ \mu_0\, \underline{j}(\underline{x},t) \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \begin{pmatrix} \phi_\omega(\underline{x}) \\ \underline{A}_\omega(\underline{x}) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_\omega(\underline{x}) \\ \mu_0\, \underline{j}_\omega(\underline{x}) \end{pmatrix}}$$

Helmholtz-egyenlet

ha $\omega = 0$

Poisson-egyenlet

$$\begin{pmatrix} \Phi(\underline{x},t) \\ \underline{A}(\underline{x},t) \end{pmatrix}_{ret} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_0} \rho\left(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right) \\ \mu_0 \underline{j}\left(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right) \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \Phi_\omega(\underline{x}) \\ \underline{A}_\omega(x) \end{pmatrix}_{ret} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_\omega(\underline{x}) \\ \mu_0 \underline{j}_\omega(\underline{x}) \end{pmatrix}}$$

→ Sztatika esetén:

$$\boxed{\Phi_{sztat}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \rho_{sztat}(\underline{x}')}$$

3. Tétel:

→ Az elektrosztatika perem-érték feladata és a megoldás egyértelműsége

Neumann- és Dirichlet feladatokra:

→ elektrosztatika esetén a hullámegyenlet: (Laplace-egyenlet):

$$\boxed{\Delta\phi(\underline{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{x})}$$

→ Megoldás Green-fgv-nyel:

Green felírás:

$$\phi(\underline{x}) = \int d^3x'\, G(\underline{x}-\underline{x}')\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{x}')$$

Beírva:

$$\Delta\phi = \int d^3x'\ \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{x}')\ \Delta_{\underline{x}} G(\underline{x}-\underline{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3x'\,\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}')\rho(\underline{x}')$$

Mivel $\Delta_{\underline{x}} G(\underline{x}-\underline{x}') = -\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}') = \Delta_{\underline{x}'} G(\underline{x}-\underline{x}')$

→ Green-tétel:

$$\int_V d^3x'\left[f(\underline{x}')\,\Delta_{\underline{x}'} g(\underline{x}') - g(\underline{x}')\,\Delta_{\underline{x}'} f(\underline{x}')\right] = \int_F d\underline{F}\left[f\underline{\nabla} g - g\underline{\nabla} f\right]$$

Itt alkalmazva:

$$g(\underline{x}') = G(\underline{x}-\underline{x}')$$
$$f(\underline{x}') = \phi(\underline{x}')$$

$\underline{x}_F$ – felületre mutató vektor

Beírva:

$$\int_V d^3x'\Big[\phi(\underline{x}')\overbrace{\left(-\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}')\right)}^{\Delta G} - G(\underline{x}-\underline{x}')\overbrace{\left(-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{x}')\right)}^{\Delta\phi}\Big] =$$

$$= \int_F dF\left[\phi(\underline{x}_F)\frac{\partial G(\underline{x}-\underline{x}_F)}{\partial n} - G(\underline{x}-\underline{x}_F)\frac{\partial\phi(\underline{x}_F)}{\partial n}\right]$$

Felhasználtuk, hogy $\underline{n}\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial n}$

Innen:

$$\boxed{\Phi(\underline{x}) = \int d^3x' \, G(\underline{x}-\underline{x}') \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\underline{x}') + \underbrace{\int_F dF \left[G(\underline{x}-\underline{x}_F) \frac{\partial \Phi(\underline{x}_F)}{\partial n} - \Phi(\underline{x}_F) \frac{\partial G(\underline{x}-\underline{x}_F)}{\partial n} \right]}_{\text{véges felületből eredő járulék}}}$$

→ peremfeltételek: $\Phi(\underline{x}_F)$; $\dfrac{\partial \Phi(\underline{x}_F)}{\partial n}$

→ megoldás ilyen alakú:

$$G(\underline{x}-\underline{x}') = \underbrace{G^{(\infty)}_{\text{part}}(\underline{x}-\underline{x}')}_{\uparrow} + \underbrace{F(\underline{x}-\underline{x}')}_{\text{homogén megoldás}}$$

∞-ben meghatározott megoldás

pl. Coulomb-pot: $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$

Homogén megoldásra feltétel: $\boxed{\Delta_{\underline{x}} F(\underline{x}-\underline{x}') = 0}$

→ Ponttöltés esete

$$\int_{\varepsilon_V} d^3x \, \Delta_{\underline{x}} \frac{1}{|\underline{x}|} = \int_{\varepsilon_F} dF \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\underline{x}|} = \int_{\varepsilon_F} r^2 d\Omega \left(-\frac{1}{r^2}\right) = -4\pi$$

$$\Delta_{\underline{x}} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = -4\pi \delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{x}')$$

→ Dirichlet-féle határfeltétel:

$$\boxed{G_D(\underline{x}-\underline{x}_F)=0}$$

→ Neumann-féle:

$$\boxed{\frac{\partial G_N(\underline{x}-\underline{x}_F)}{\partial n}=0}$$

→ ez nem teljesíthető, mivel $\int dF \frac{\partial G_N}{\partial n} = -1$ -nek teljesülnie kell

Közelíteni lehet:

$$\boxed{\frac{\partial G_N(\underline{x}-\underline{x}_F)}{\partial n} = -\frac{1}{F}}$$

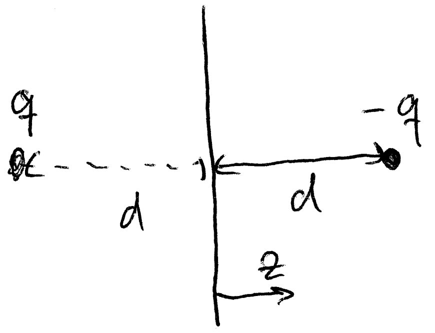
ha $F \to \infty$

→ Dirichlet-féle probléma:

$$\boxed{\phi(\underline{x})=\int_V G_D(\underline{x}-\underline{x}')\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\underline{x}')d^3x' - \int_F dF \frac{\partial G_D(\underline{x}-\underline{x}_F)}{\partial n}\phi(\underline{x}_F)}$$

→ Megoldás síkkal határolt féltérben, $\phi(\underline{x}_F)$ ismert:

→ Tükörtöltés módszere:



$$\Delta \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_F|}=0$$

→ sík Dirichlet-fgv-je:

→ $\phi(\underline{x}_F)=0$

$$\boxed{G_D(\underline{x}-\underline{x}') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} - \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_T|}\right)}$$

$$\frac{\partial G_D}{\partial z} \neq 0$$

→ tetszőleges töltéselrendeződésre jó

→ <u>Megoldás egyértelműsége</u>

$u = \phi_1 - \phi_2$; $\boxed{\Delta u = 0}$ $\quad u \Delta u = \mathrm{div}(u \underline{\nabla} u) - (\underline{\nabla} u)^2$; Gauss

$$0 = \int_V d^3x \, u \Delta u = \underbrace{\int d\underline{F} \, u \frac{\partial u}{\partial n}}_{0,\ \text{Dirichlet és Neumann esetben is}} - \int_V d^3x \underbrace{(\underline{\nabla} u)^2}_{\text{pozitív szemi-definit}}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{\nabla} u = 0$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{u = \mathrm{const}}$$

$$u^D_F = \frac{\partial u^N}{\partial n} = 0$$

→ Laplace-egyenlet megoldása a változók szeparálásával:

$$\boxed{\Delta\phi = 0}$$

→ Descartes-rendszerben:

$\phi(\underline{x}) = f_1(x)\, f_2(y)\, f_3(z)$ ilyen alakot keresünk

$$f_2 f_3 \frac{d^2 f_1}{dx^2} + f_1 f_3 \frac{d^2 f_2}{\partial y^2} + f_1 f_2 \frac{d^2 f_3}{dz^2} = 0$$

$$\frac{1}{f_1}\frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{1}{f_2}\frac{d^2 f_2}{dy^2} + \frac{1}{f_3}\frac{d^2 f_3}{dz^2} = 0$$

$$C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = 0$$

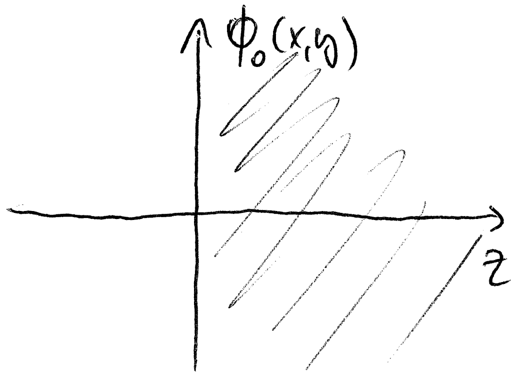
Tehát:

$\frac{d^2 f_i}{\partial x_i^2} = C_i^2 f_i$, ahol $i = 1,2,3$ $\quad C_i \in \mathbb{C}$

megoldás: $\boxed{f_i = A_i e^{\pm C_i x_i}}$

Egyenlet lineáris: $\boxed{\phi(\underline{x}) = \sum_i A_i e^{\pm \sum_i C_i x_i}}$

→ Laplace-egyenlet megoldása a $z>0$ félsíkon: Fourier-vel:



$$\boxed{\phi_0(x,y) = \int \frac{d\xi_1}{2\pi} \int \frac{d\xi_2}{2\pi} e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)} \tilde{\phi}(\xi_1, \xi_2)}$$

$C_3^2 > 0$ → z irányban lecseng

$C_1^2, C_2^2 < 0$ → követi ϕ_0 határon felvett értékét

$$\boxed{\phi = \int \tilde{A}(q_1, q_2)\, e^{-c_3 z} e^{iq_1 x + iq_2 y} \frac{dq_1 dq_2}{(2\pi)^2}}$$

$$c_3^2 - q_1^2 - q_2^2 = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{c_3 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}}$$

$\phi(x, y, z=0) = \phi_0(x, y)$ határfeltétel

$\hookrightarrow$ Fourier-együttható:

$$\tilde{A}_0(q_1, q_2) = \tilde{\phi}_0(q_1, q_2)$$

$\rightarrow$ Megoldás gömbi-polárban:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} r \sin\Theta \cos\varphi \\ r \sin\Theta \sin\varphi \\ r \cos\Theta \end{pmatrix} \Rightarrow \phi = \phi(r, \Theta, \varphi)$$

Gömbi Laplace:

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) + \frac{1}{r^2}\hat{L}^2\phi = 0}, \text{ ahol}$$

$$\boxed{\hat{L}^2\phi = \frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial\phi}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}}$$

ϕ-t ilyen alakban keressük:

$$\boxed{\phi(r, \Theta, \varphi) = \frac{u(r)}{r} P(\Theta) Q(\varphi)}$$ Beírva:

$$\frac{1}{r} u''(r) PQ + \frac{u}{r^3}\left[Q \frac{1}{\sin\Theta}(\sin\Theta P')' + \frac{P}{\sin^2\Theta} Q''\right] = 0$$

→ szeparáció:

$$\frac{u''}{u}+\frac{1}{r^2}\underbrace{\left[\frac{1}{P}\frac{1}{\sin\Theta}(\sin\Theta P')'+\frac{1}{\sin^2\Theta}\frac{1}{Q}Q''\right]}=0$$

~r tisztán r függés

nem függ r-től, legyen $\boxed{-\ell(\ell+1)}$

$$\frac{d^2u}{dr^2}=\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}u$$ → $u\sim r^\alpha$ alakú megoldás

→ karakterisztikus egyenlet:

$$\alpha(\alpha-1)=\ell(\ell+1)$$

$$\boxed{\alpha=-\ell\ ,\ \alpha=\ell+1}$$

$$\boxed{u_\ell(r)=A_\ell r^{-\ell}+B_\ell r^{\ell+1}}$$

A szögfüggő részeket keresem, ezt beírom:

$$\Phi(r,\Theta,\varphi)=\sum_\ell\left(A_\ell r^{-\ell-1}+B_\ell r^{\ell}\right)P_\ell Q_\ell$$

→ φ szerinti függés periodikus, önmagával azonos kell, hogy legyen

$$\frac{d^2Q}{d\varphi^2}=-m^2Q$$

$$\boxed{Q(\varphi)=e^{\pm im\varphi}\ \Big\|\ \varphi\in(0,2\pi]\ \Big|\ m\in\mathbb{Z}}$$

↓

kell mert: $Q(\varphi+2\pi)=Q(\varphi)$-t akarok

→ Θ függés:

P_ℓ^m → l, m függés

$$\frac{1}{\sin\Theta}\frac{d}{d\Theta}\left(\sin\Theta\frac{dP_\ell^m}{d\Theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\Theta}P_\ell^m=-\ell(\ell+1)P_\ell^m$$

m=0 esetben → extra szimmetria → kiesik az Azimuth-szögből való függés

cos(z)

pl. gömb

változócsere:
$x=\cos\Theta$

$d\cos\Theta=dx=-\sin\Theta\, d\Theta$, ezeket felhasználva:

$$\boxed{+\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}\right]=-\ell(\ell+1)P_\ell}$$

Legendre-egyenlet

→ megoldások: Legendre-polinomok: $\ell\in\mathbb{N}$

$P_0=1$

$P_1=x$

$P_2=\frac{3}{2}(x^2-1)$

:

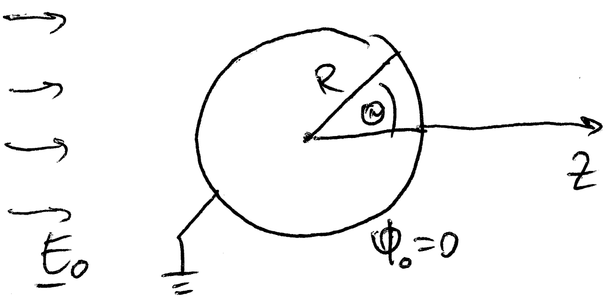
$$\boxed{P_\ell(x)=\frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell}$$

Teljességi feltétel:
↗ $f(x)=\sum_\ell a_\ell P_\ell(x)$ alakú sorfejthetőség

Ortogonális fgv-k.

$$\int_{-1}^{1}dx\,P_\ell(x)P_{\ell'}(x)=\delta_{\ell\ell'}\frac{2}{2\ell+1}$$

→ Példa: R sugarú, földelt gömb, homogén E_0 térben:



→ gömbön polarizáció

→ határok, amihez illeszteni kell

$r=R$, $r=\infty$

→ $r>R$ eseteket vizsgálok

$$\boxed{\phi(r,\Theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^{-l-1} + B_l r^{l}\right)}$$ a megoldás

→ P_l a Laurentsorban

PFill:

→ $\phi(R,\Theta) = \phi_0 = 0$

→ ∞-ben a gömbnek nincs járuléka

$$\phi(r\to\infty,\Theta) = -E_0 z = -E_0 r\cos\Theta = -E_0 r P_1(\cos\Theta)$$

→ r=∞-ből a Laurentsor

$$\boxed{\begin{aligned} B_0 &= 0 \\ B_1 &= -E_0 \\ B_{l\geq 2} &= 0 \end{aligned}}$$

→ r=R-nél:

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^{-l-1} P_l - E_0 R P_1 = 0$$

(szögfüggő részek)
→ P_l-nek el kell tűnnie

→ teljességi feltételből:

$$f(x) = 0 = \sum_i a_i P_i(x)$$

ha $l \neq 1$ → $\boxed{A_{l\neq 1} = 0}$

$$A_1 R^{-2} = E_0 R$$

$$\boxed{A_1 = E_0 R^3}$$

→ Megoldás a külső tartományon:

$$\boxed{\phi(r>R,\Theta) = \frac{E_0 R^3}{r^2}\cos\Theta - E_0 r\cos\Theta = \frac{E_0 R^3 \underline{e_z} \underline{r}}{r^3} - E_0 z}$$

Legyen $\boxed{\Phi_{dipól} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}}$ ahol $\vec{p}$ → dipól momentum

→ m≠0 esetben:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l^m}{dx}\right] - \frac{m^2}{1-x^2}P_l^m + l(l+1)P_l^m = 0}$$

P_l^m → asszociált Legendre-polinom

$$\boxed{P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_l(x)}{dx^m}}$$

$0 \le m \le l$

→ $-m$-re is kéne valami szimmetrikus megoldás

$$\boxed{P_l^{-m} = \frac{(-1)^m (l-m)!}{(l+m)!}P_l^m}$$

→ ezzel a legáltalánosabb megoldás:

$$\boxed{\Phi(r,\Theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^{-l-1} + B_{lm}r^{l}\right)P_l^m(\cos\Theta)e^{im\varphi}}$$

→ Gömbharmonikus-függvények:

$$\boxed{Y_{lm}(\Theta,\varphi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}P_l^m(\cos\Theta)e^{im\varphi}}$$

→ Ortonormáltság:

$$\int_{-1}^{1}d\cos\Theta\int_{0}^{2\pi}d\varphi\, Y_{lm}^*(\Theta,\varphi)\,Y_{l'm'}(\Theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

→ Gömb-harmonikus sorfejtés:

→ legáltalánosabb megoldása a gömbi Laplace-nak:

$$\boxed{\Phi(r,\Theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm} r^{-l-1} + B_{lm} r^{l}\right) Y_{lm}(\Theta,\varphi)}$$

→ ebben tetszőleges rendig lehet a kapott fejt.

→ Sorfejtés: $d\Omega = d\cos\Theta\, d\varphi$ $\quad f(\Theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\Theta,\varphi)$

$$\int Y_{lm}^{*}(\Theta,\varphi) f(\Theta,\varphi)\, d\Omega = \sum_{l',m'} a_{l'm'} \underbrace{\int Y_{lm}^{*}(\Theta,\varphi) Y_{l'm'}(\Theta,\varphi)\, d\Omega}_{\delta_{ll'}\delta_{mm'}} = a_{lm}$$

$$f(\Theta,\varphi) = \sum_{l,m} \underbrace{\int d\Omega'\, Y_{lm}^{*}(\Theta',\varphi') f(\Theta',\varphi')}_{a_{lm}} Y_{lm}(\Theta,\varphi) =$$

$$= \int d\Omega' \underbrace{\left[\sum_{l,m} Y_{lm}^{*}(\Theta',\varphi') Y_{lm}(\Theta,\varphi)\right]}_{\delta(\cos\Theta-\cos\Theta')\delta(\varphi-\varphi')} f(\Theta',\varphi')$$

→ Fourier-hoz hasonló sorfejtés:

$$\boxed{\sum_{l,m} Y_{lm}^{*}(\underline{n}') Y_{lm}(\underline{n}) = \delta^{(2)}(\underline{n}-\underline{n}')}$$

→ Addíciós-tétel:

$$\boxed{P_l(\underline{n}\cdot\underline{n}') = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^{*}(\underline{n}) Y_{lm}(\underline{n}')}$$

→ Az elektrosztatikus potenciál multipólus sorfejtése:

$$\Phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \frac{\varrho(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

$|\underline{x}| >> d \sim |\underline{x}'|$ [illegible] esetben sorfejtés

$$\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}}$$ ezt kell sorfejteni

ahol $\cos\gamma = \underline{n}\,\underline{n}' = \frac{\underline{x}}{r}\cdot\frac{\underline{x}'}{r}$

Legendre-polinomok szerint fejtsük sorba:

$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\cos\gamma)$, $\underline{x}, \underline{x}'$ egy irányba áll

$\boxed{P_\ell(1) = 1}$

→ ezt tudnia kell itt

$$\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \to \frac{1}{|z-z'|}$$

esetszétválasztás

→ $z > z'$

→ $z' > z$

ha $z > z'$:

$$\frac{1}{z-z'} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{z'}{z}} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{z'^\ell}{z^{\ell+1}}$$

ha $z' > z$:

$$\frac{1}{z'-z} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{z^\ell}{z'^{\ell+1}}$$

$$\boxed{\frac{1}{|z-z'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{z_<^\ell}{z_>^{\ell+1}}}$$

↓ innen

$$\boxed{a_\ell = \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}}}$$

$r > r'$-et lefixálva

→ visszaírva:

$$\phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\int d^3x'\,\rho(\underline{x}')\,r'^l\,\frac{1}{r^{l+1}}\,P_l(\overbrace{\underline{n}\,\underline{n}'}^{\cos\gamma})$$

Tudjuk, hogy (addíciós tétel)

$$P_l(\underline{n}\,\underline{n}') = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\underline{n})\,Y_{lm}(\underline{n}') = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m} Y_{lm}^*(\underline{n}')\,Y_{lm}(\underline{n}),$$

így:

$$\phi(\underline{x}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{(2l+1)\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^{l+1}}\,Y_{lm}^*(\underline{n})\int d^3x'\,r'^l\,Y_{lm}(\underline{n}')\,\rho(\underline{x}')$$

Legyen a multipól tag:

$$\boxed{q_{lm} = \int d^3x'\,r'^l\,Y_{lm}^*(\underline{n}')\,\rho(\underline{x}')}$$

$$\boxed{\phi(\underline{x}) = \sum_{l,m}\frac{q_{lm}}{\varepsilon_0(2l+1)}\,\frac{1}{r^{l+1}}\,Y_{lm}(\theta,\varphi)}$$

Vizsgáljuk meg az $l=0$ és $l=1$ tagokat

$$\phi_{l=0} = \frac{q_{00}}{\varepsilon_0 r}\,Y_{00}(\theta,\varphi)$$

→ ortonormáltságból

Tudjuk, hogy $\int |Y_{00}|^2\,d\Omega = 1 \rightarrow \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$$\rightarrow \quad q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int d^3x'\,\rho(\underline{x}') = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\boxed{\phi_{l=0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r}}$$ Coulomb-pot

$\Phi_{l=1}$?

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\Theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\frac{z'}{r'}$$

$$Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\Theta\, e^{i\varphi} = Y^{*}_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\frac{x'+iy'}{r'}$$

$$q_{10} = \int d^3x'\,\cancel{r'}\,\varrho(\underline{x}')\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\frac{z'}{\cancel{r'}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,d_z\,,$$

ahol bevezettük, hogy

$$\boxed{\underline{d} = \int d^3x'\,\varrho(\underline{x}')\,\underline{x}'}$$ dipólvektor

$$q_{11} = \int d^3x'\,r'\,\varrho(x')\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\frac{x'-iy'}{r'} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(d_x - id_y) = q^{*}_{1,-1}$$

Innen:

$$\boxed{\Phi_{l=1} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2}\left[Y_{10}\,q_{10} + Y_{11}\,q_{11} + Y_{1,-1}\,q_{1,-1}\right] =}$$

$$\Phi_{l=1} = \frac{1}{3\varepsilon_0 r^2}\left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\frac{z}{r}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,d_z + \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\frac{x+iy}{r}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(d_x - id_y) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\frac{x-iy}{r}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(d_x + id_y)\right] =$$

$$\boxed{\Phi_{l=1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(d_z z + x d_x + y d_y\right) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\underline{d}\,\underline{x}}{r^3}}_{\text{dipólus-tag}}}$$

→ Sorfejtés Taylor-módszerrel:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2\underline{x}\underline{x}'}} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}-\frac{2\underline{x}\underline{x}'}{r^2}}} \approx$$

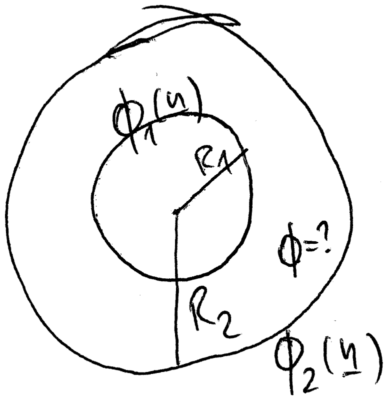
$$\approx \frac{1}{r}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{r'^2}{r^2}-2\frac{r'}{r}\underline{n}\underline{n}'\right)-\frac{1}{8}\cdot 4\cdot\frac{r'^2}{r^2}(\underline{n}\underline{n}')^2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r'^2}{r^2}-2\frac{r'}{r}(\underline{n}\underline{n}')\right)+\frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2}(\underline{n}\underline{n}')^2+\frac{r'^2}{r^2}(\underline{n}\underline{n}')^2+\mathcal{O}\left(\frac{r'^3}{r^3}\right)\right]$$

$$\boxed{\Phi(\underline{x})\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[\int d^3x'\rho(\underline{x}')+\frac{1}{r}n_i\int \underbrace{d^3x'\rho(\underline{x}')\,\underline{x}'}_{\underline{d}}+\frac{1}{r^2}n_in_j\underbrace{\frac{1}{2}\int d^3x'\rho(\underline{x}')\left(3x_i'x_j'-\delta_{ij}r'^2\right)}_{Q_{ij}=Q_{ji}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]}$$

$\underline{\underline{Q}}$ → Kvadrupol momentum tenzor

→ Példa: Két koncentrikus gömb közti tér: $R_2 > R_1$



Dirichlet-probléma: $\Delta G_D(\underline{x}, \underline{x}') = -\delta(\underline{x} - \underline{x}')$

Belátható, hogy:

$$\int dr\, r^2 \frac{1}{r^2} \delta(r - r_0) \int d\Omega\, \delta(\cos\Theta - \cos\Theta') \delta(\varphi - \varphi') = 1$$

$$\Delta G_D(\underline{x}, \underline{x}') = -\frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{l,m} Y_{lm}^*(\Theta', \varphi') Y_{lm}(\Theta, \varphi)$$

$G_D(\underline{x}, \underline{x}') = \sum_{l,m} A_{lm}(r; r', \underline{n}) Y_{lm}(\Theta, \varphi)$ alakú megoldást keresek

Laplace:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r A_{lm}(r; r', \underline{n}') \right) - \frac{1}{r^2} l(l+1) A_{lm}(r; r', \underline{n}') = -\frac{1}{r^2} \delta(r - r') Y_{lm}^*(\underline{n}')$$

$A_{lm}(r; r', \underline{n}') = g_l(r; r') Y_{lm}^*(\underline{n}')$ → $\underline{n}'$ függés miatt, mindkét oldalon

Ezzel

$$G_D \doteq \sum_{l,m} g_l(r; r') Y_{lm}^*(\underline{n}') Y_{lm}(\underline{n})$$

g_l meghatározható:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left(r g_l(r; r') \right) - \frac{1}{r^2} l(l+1) g_l(r; r') = -\frac{1}{r^2} \delta(r - r'), \quad r \neq r'$$

Megoldást két tartományra bontjuk:

1, $R_1 < r < r'$ → $g_l^{(1)} = A_l(r') r^l + B_l(r') r^{-l-1}$

2, $r' < r < R_2$ → $g_l^{(2)} = A_l'(r') r^l + B_l'(r') r^{-l-1}$

→ Dirichlet-féle határfeltétel miatt:

$$G_D(r=R_1, r') = G_D(r=R_2, r') = 0$$

Innen: $A_l R_1^l + B_l R_1^{-l-1} = 0$

$A'_l R_2^l + B'_l R_2^{-l-1} = 0$

1, $r<r'$ esetben:

$$g_l^{(1)} = A_l(r')\left[r^l - R_1^{2l+1} r^{-l-1}\right]$$

2, $r>r'$ esetben:

$$g_l^{(2)} = B'_l(r')\left[r^{-l-1} - R_2^{-2l-1} r^l\right]$$

r, r' szimmetria

$$\boxed{g_l(r,r') = C_l\left(r_>^{-l-1} - R_2^{-2l-1} r_>^l\right) \cdot \left(r_<^l - R_1^{2l+1} r_<^{-l-1}\right)}$$

ahol $r_< = \min(r,r')$

$r_> = \max(r,r')$

g_l folytonos fgv, korlátos → $r'=r$-ben ∅ szinguláris

→ C_l innen meghatározható:

$$\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} dr\, r^2\left(-\frac{1}{r^2}\delta(r-r')\right) = -1 = \int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} r\frac{d^2}{dr^2}(r g_l) = r\frac{d}{dr}(r g_l)\Big|_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} - \underbrace{\int_{r'-\varepsilon}^{r'+\varepsilon} dr\, r g_l}_{\to 0}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\underbrace{r\frac{d}{dr}\left(r g_l(r,r')\right)\Big|_{r'+\varepsilon}}\;-\;\underbrace{r\frac{d}{dr}\left(r g_l\right)\Big|_{r'-\varepsilon}}\Big]=-1$$

Esetek: $r'=r$ | $r'>r$

$r=r_>$ | $r=r_<$

Deriválás után $r=r'$ helyettesíthető

$$C_l r\Big[-(l+1)r^l+lR_1^{2l+1}r^{-l}\Big)\Big(r^{-l-1}-R_2^{-2l-1}r^l\Big)+\Big(-lr^{-l-1}-(l+1)R_2^{-l-1}r^l\Big)\Big(r^l-R_1^{2l+1}r^{-l-1}\Big]$$

$$=-1$$

$$C_l\left[-2l-1+(2l+1)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2l+1}\right]=-1$$

$$\boxed{C_l=\frac{1}{(2l+1)\left(1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2l+1}\right)}}$$

4. Tétel: Polarizálható közegek elektrosztatikája:

$$\mathrm{div}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{mikroszkopikus}}}{\underline{e}}(\underline{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\eta(\underline{x}) \quad , \quad \text{ahol} \quad \eta(\underline{x}) = \rho_{makro}(\underline{x}) + \underbrace{\eta_{kötött}(\underline{x})}_{\text{anyagszerkezetből}}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{e}(\underline{x}) = 0$$

$$\eta_{kötött}(\underline{x}) = \sum_n \sum_{jn} q_{jn}\,\delta(\underline{x} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n-edik} \\ \text{pont közepe}}}{\underline{x}_n} - \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{relatív elmozd}}}{\underline{x}_{jn}})$$

→ Átlagolás sok részecskére: $F(\underline{x} - \underline{x}')$ átlagoló függvénnyel

$$\underset{\text{mikr.}}{h(\underline{x}')} \xrightarrow{F(\underline{x}-\underline{x}')} \underset{\text{makr.}}{H(\underline{x}')}$$

$$H(\underline{x}) = \frac{1}{\underbrace{\int d^3x'\, F(\underline{x}')}_{\text{normálás}}} \int d^3x'\, h(\underline{x}')\, F(\underline{x} - \underline{x}')$$

Jelölje: $\overline{\eta_k(\underline{x})} = \int \eta_{kötött}(\underline{x}')\, F(\underline{x} - \underline{x}')\, d^3x'$

Beírjuk:

$$\mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_m(\underline{x}) + \overline{\eta_k(\underline{x})}\right)$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{E}(\underline{x}) = 0 \rightarrow \underline{E}(\underline{x}) = -\mathrm{grad}\,\phi(\underline{x})$$

$$\overline{\eta_k(\underline{x})} = \sum_n \sum_{jn} q_{jn}\, F(\underline{x} - \underline{x}_n - \underline{x}_{jn}) \quad \text{sorfejtése lineáris rendig}$$

$$\overline{\eta_\varepsilon(\underline{x})} \approx \sum_n \underbrace{\Big(\sum_{jn} q_{jn}\Big)}_{0} F(\underline{x}-\underline{x}_n) - \sum_n \underbrace{\Big(\sum_{jn} q_{jn}\, x_{jn\alpha}\Big)}_{d_{n\alpha}} \partial_\alpha F(\underline{x}-\underline{x}_n) + \underbrace{\dots}_{\text{Kvadrupól}}$$

parc integrálás nem ad járulékot

$$\overline{\eta_\varepsilon} = -\sum_n d_{n\alpha}\,\partial^{x}_\alpha F(\underline{x}-\underline{x}_n) = -\sum_n \int d^3x'\, F(\underline{x}-\underline{x}')\, \partial^{x'}_\alpha \Big(d_{n\alpha}\,\delta(\underline{x}'-\underline{x}_n)\Big) =$$

$$= \sum_n \int d^3x'\, \partial^{x'}_\alpha F(\underline{x}-\underline{x}')\, d_{n\alpha}\,\delta(\underline{x}'-\underline{x}_n) = -\sum_n \partial^{x}_\alpha F(\underline{x}-\underline{x}_n)\, d_{n\alpha} =$$

helyettesítés: $\underline{x}' \to -\underline{x}$

$$= \int d^3x\, F(\underline{x}-\underline{x}') \Big[\underbrace{-\partial^{x'}_\alpha \Big(\sum_n d_{n\alpha}\,\delta(\underline{x}'-\underline{x}_n)\Big)}_{-\mathrm{div}_{\underline{x}'} P(\underline{x}')\text{, mivel}}\Big]$$

$$\boxed{P_\alpha(\underline{x}') = \sum_n d_{n\alpha}\,\delta(\underline{x}'-\underline{x}_n)}$$ átlagolt elektrosztatikus dipólmomentum

így: $$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\Big(\rho_m(\underline{x}) - \mathrm{div}\,\underline{P}(\underline{x})\Big) \\ &\mathrm{rot}\,\underline{E}(\underline{x}) = 0 \end{aligned}}$$

Legyen $$\boxed{\begin{aligned} &\underline{D}(\underline{x}) = \varepsilon_0 E(\underline{x}) + \underline{P}(\underline{x}) \\ &\mathrm{div}\,\underline{D} = \rho_m(\underline{x}) \end{aligned}}$$, → elektromos eltolás vektora ellor

Általában $\underline{P}(\underline{x}) = \underline{P}[\underline{E}(\underline{x})]$ kivéve, ha lefagy

→ kis $\underline{E}$ esetén → lineáris polarizálhatóság

→ ekkor:

$\boxed{\underline{P} \approx \varepsilon_0 \chi_e \underline{E}(\underline{x})}$, ahol χ_e → elektromos szuszceptibilitás

így:

$$\boxed{\underline{D}(\underline{x}) = \varepsilon_0(1+\chi_e)\underline{E}(\underline{x}) = \varepsilon\, \underline{E}(\underline{x})}$$

ahol $\varepsilon_r = 1+\chi_e$

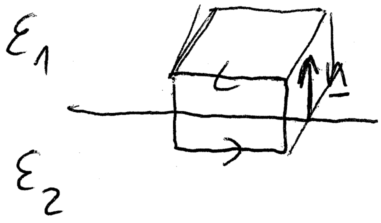
$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ dielektromos állandó

Ha ε nem függ $\underline{x}$-től:

$$\boxed{\mathrm{div}\,\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon}\varrho_m(\underline{x}) \rightarrow \Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon}\varrho_m(\underline{x})}$$

→ **Határfeltételek:**

$\boxed{\underline{E}_{t1} = \underline{E}_{t2}}$ tangenciális vetület megegyezik



$\underline{E} = \underline{E}_t + \underline{E}_n$

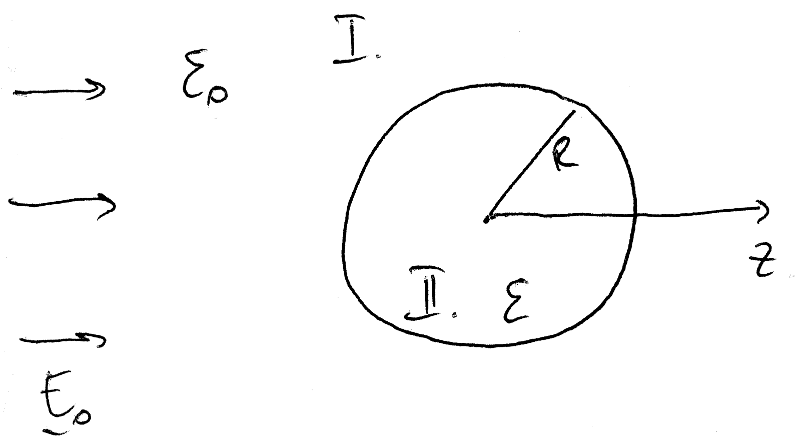
$\boxed{\underline{n}\times(\underline{E}_1 - \underline{E}_2) = 0}$ ↔ $\mathrm{rot}\,\underline{E} = \underline{0}$

másik komponensre feltétel a Gauss-törvényből

$\boxed{\underline{n}(\underline{E}_1 - \underline{E}_2) = K_m(\underline{x})}$

↑ felületi makroszkopikus töltéssűrűség

→Példa: Dielektromos gömb homogén térben:



→ gömbszimmetrikus probléma

↓

Legendre-polinomok

$$\Delta\phi_{I} = \Delta\phi_{II} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_{I} &= -E_0 r P_1 + B_\ell \frac{1}{r^2} P_1 \\ \phi_{II} &= A_\ell r P_1\end{aligned}\right\}$$ földelt gömbnél megoldottuk

$$E_{t1} = E_{t2} \Rightarrow \phi_{I}(R) = \phi_{II}(R)$$

$$\boxed{-E_0 R \cancel{P_1} + B_\ell \frac{1}{R^2} \cancel{P_1} = A_\ell R \cancel{P_1}}$$

$$D_{r1} = D_{r2} \Rightarrow -\left.\frac{\partial \phi_{I}}{\partial r}\right|_{r=R} \varepsilon_0 = -\left.\frac{\partial \phi_{II}}{\partial r}\right|_{r=R} \varepsilon$$

$$\boxed{\varepsilon_0\left(-E_0 - \frac{2}{R^3} B_\ell\right) = \varepsilon A_\ell}$$

Megoldva a konstansok:

$$A_\ell = -\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 = \boxed{\frac{-3}{\varepsilon_r + 2} E_0 = A_\ell}$$

$$\boxed{B_\ell = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 R^3}$$

$$\underline{E}_{bent} = \frac{3}{\varepsilon_r + 2}\underline{E}_0$$

→ indukált dipólmomentum: $$\boxed{\Phi_{dipol} = \underbrace{E_0 R^3 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}}_{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} d} \frac{1}{r^2} P_1}$$

A polarizáció vektor:

$$\underline{P} = \varepsilon_0 \chi_e \underline{E}, \quad \left.\begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e) \\ \downarrow \\ \varepsilon - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \chi_e \end{array}\right\} \underline{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\underline{E}$$

Tehát: $$\boxed{\underline{P} = \frac{4\pi}{3} R^3 (\varepsilon - \varepsilon_0)\underline{E}}$$

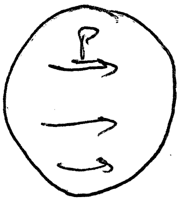
Ha megcseréljük a helyzetet szimmetriaokok miatt minden marad, csak:

$\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon_0$

$E_{b0} \leftrightarrow E_b$

$E_0 \leftrightarrow E_k$

→ Példa: Állandó $\underline{P}$ polarizáltságú gömb tere:



$$\Phi_{bent} = -\underline{E}_b \underline{x} = -E_b r P_1$$

$$\Phi_{kint} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{r^2}P_1$$, ahol $\underline{d} = \frac{4\pi}{3}R^3\underline{P}$ az eredő dipólmomentum

Határon $\Phi_{bent} = \Phi_{kint}$: $-E_b \cancel{R} P_1 = \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\frac{\cancel{d}P_1}{\cancel{R^2}} \cancel{4\pi}\frac{1}{3}\cancel{R^3}P$

$$\rightarrow \boxed{\underline{E}_b = -\frac{1}{3\varepsilon_0}\underline{P}}$$

$$D_{n1}(R) = D_{n2}(R)$$

$$\underline{n}\,\underline{D}_1 = \underline{n}\,\underline{D}_2$$

$$\underline{n}\left(\varepsilon_0 \underline{E}_b + \underline{P}\right)\Big|_{r=R} = \underline{n}\,\underline{E}_k\Big|_{r=R} \varepsilon_0$$

$$\|$$

$$\boxed{\underline{n}\,\underline{E}_k = \frac{2}{3}\,\underline{n}\,\underline{P}\,\frac{1}{\varepsilon_0}}$$

→ Clausius - Mossotti reláció az atomi és a makroszkópikus polarizálhatóság között:

(χ_{atom}) (χ_e)

E - külső tér

$\underline{e}(\underline{x}_a)$ atom által érzett belső tér

$$p_{atom} = \varepsilon_0 \chi_{atom}\, \underline{e}(\underline{x}_a)$$

$$\underline{P} = \varepsilon_0 \chi_e \underline{E} = N p_{atom}$$

$\underline{e}(\underline{x}_a) = \underline{E} + \underline{e}_i$, ahol $\underline{e}_i = \underline{e}_{kristály} + \underline{E}_{üreg}$

$\underline{e}_{kristály} = \underline{0}$ a stabilitás miatt

$$\underline{E}_{üreg} = -\underline{E}(\underline{P}_{gömb}) = \frac{1}{3\varepsilon_0}\underline{P}$$

ezzel $\underline{e}_i = \dfrac{1}{3\varepsilon_0}\underline{P} = \dfrac{1}{3}\chi_e \underline{E}$,

$$\underline{e}(\underline{x}_a) = \underline{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\underline{P} = \underline{E}\left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right)$$

Beírva: $\underline{P} = N \cancel{\varepsilon_0} \chi_{atom}\left(1 + \dfrac{\chi_e}{3}\right)\cancel{\underline{E}} = \cancel{\varepsilon_0}\chi_e \cancel{\underline{E}}$

$$\rightarrow \boxed{\chi_{atom} = \frac{1}{N}\,\frac{\chi_e}{1 + \frac{\chi_e}{3}}}$$

→ Rugalmasan kötött ē-modell (Drude-modell):

$$\boxed{m\omega_a^2 \underline{x}_a = q\,\underline{e}(\underline{x}_a)}$$

$$\boxed{\underline{p}_a = q\underline{x}_a = \frac{q^2}{m\omega_a^2}\,\underline{e}(\underline{x}_a)}$$

$$\boxed{\chi_{atom} = \frac{q^2}{m\omega_a^2}\frac{1}{\varepsilon_0}}$$

ha több rezgési frekvencia lehetséges, akkor

$$\chi_{atom} = \sum_i \frac{q_i^2}{m_i\omega_i^2}\frac{1}{\varepsilon_0}$$

→ Befagyott dipól-momentum modell:

→ egyenletes eloszlás, átlag zérus

$$U_{pot} = -\underline{p}_a\underline{e}(\underline{x}_a) = -pe\underbrace{\cos\Theta}_{x}$$

T hőm → rendezetlenséget okozó hőmozgás

$$\Pi(\cos(\hat{p}_a,\underline{e})) = N e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}$$

↑ valószínűségsűrűség

$$\langle \underline{p}_a\hat{\underline{e}} \rangle = \int_{-1}^{1} \underline{p}_a\hat{\underline{e}}\,\Pi(\cos(\widehat{p_a\underline{e}}))\,d\cos(\widehat{p_a\underline{e}})$$

Normálással, Π-t beírva:

$$\langle \underline{p}_a\hat{\underline{e}} \rangle = \frac{1}{\int_{-1}^{1} e^{-\frac{\underline{p}_a\underline{e}}{k_B T}}\,d\cos(\widehat{p_a\underline{e}})} \int_{-1}^{1} d\cos(\hat{p}_a,\underline{e})\,\underline{p}_a\hat{\underline{e}}\,e^{-\frac{\underline{p}_a\underline{e}}{k_B T}}$$

legyen $y = \cos(\hat{p_a}, \underline{e})$, $\xi = \frac{p_a e}{k_B T}$

$$\langle p_a \hat{\underline{e}} \rangle = \frac{p_a \int_{-1}^{1} dy\, y\, e^{-\frac{p_a e}{k_B T} y}}{\int_{-1}^{1} dy\, e^{-\frac{p_a e}{k_B T} y}} = p_a \frac{-\frac{d}{d\xi}\int_{-1}^{1} dy\, e^{-\xi y}}{\int_{-1}^{1} dy\, e^{-\xi y}} =$$

$$= p_a \frac{d}{d\xi} \ln \underbrace{\int_{-1}^{1} dy\, e^{-\xi y}}_{-\frac{1}{\xi} e^{-\xi y}\Big|_{-1}^{1}} = - p_a \frac{d}{d\xi} \ln\left(\frac{-1}{\xi}\left(e^{-\xi} - e^{\xi}\right)\right) \simeq$$

Ha $\xi = \frac{p_a e}{k_B T} \ll 1$, akkor sorfejtés:

$$\simeq p_a \frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\xi}\left(2\xi + \frac{1}{3}\xi^3 + \dots\right)\right] = \frac{1}{3} p \xi$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_0 \chi_a = \frac{p_a^2}{3 k_B T}}$$ Langevin-képlet

2. Tétel: Polarizálható közeg energiasűrűsége: (dielektromos)

$\rho_m(\underline{X})$ adott, $\delta\rho(\underline{X})$ adagokban viszünk be

$$\delta W = \int d^3x\, \delta\rho_m(\underline{X})\,\phi(\underline{X})$$

Linearitás esetén: $\mathrm{div}\,\underline{D}(\underline{X}) = \rho_m(\underline{X})$

$$\mathrm{div}(\underline{D} + d\underline{D}) = \rho_m + \delta\rho_m$$

$$\mathrm{div}\,\delta\underline{D} = \delta\rho_m$$ → ezt beírjuk

$$\delta W = \int d^3x\, \underbrace{\left(\mathrm{div}\,\delta D(\underline{X})\right)\phi(\underline{X})}_{\underbrace{\mathrm{div}\left(\delta\underline{D}\,\phi(\underline{X})\right)}_{0} - \delta\underline{D}(\underline{X})\,\mathrm{grad}\,\phi(\underline{X})} =$$

$$\delta W = -\int d^3x\, \delta\underline{D}(\underline{X})\,\mathrm{grad}\,\phi(\underline{X}) = \boxed{\int d^3x\, \delta\underline{D}(\underline{X})\,\underline{E}(\underline{X}) = \delta W}$$

~extenzív ~intenzív

Ha a közeg lineárisan polarizálható: $\underline{D} = \varepsilon\underline{E}$

$$\delta\underline{D}(\underline{X}) = \varepsilon\,\delta\underline{E}(\underline{X})$$

$$\delta\underline{D}\cdot\underline{E} = \varepsilon\,\delta\underline{E}\cdot\underline{E} = \frac{\varepsilon}{2}\delta(E^2)$$ → beírva:

$$\boxed{\delta W = \frac{1}{2}\varepsilon\int d^3x\, \delta(\underline{E}^2) = \frac{1}{2}\varepsilon\delta\int d^3x\, \underline{E}^2(\underline{X})}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon}{2}\int d^3x\, \underline{E}^2 = \frac{1}{2}\int d^3x\, \underline{E}\,\underline{D}}$$

5. Tétel: Magnetosztatika:

$$\operatorname{div} \underline{B}(\underline{x}) = 0 \quad ; \quad \operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \underline{j}(\underline{x})$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A} \longrightarrow \mu_0 \underline{j}(\underline{x}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \underline{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \underline{A} - \Delta \underline{A}$$

Válasszunk Coulomb-mértéket: $\operatorname{div} \underline{A} = 0$, akkor

$$\boxed{\Delta \underline{A}(\underline{x}) = -\mu_0 \underline{j}}$$

Megoldva:

$$\boxed{\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\underline{j}(\underline{x})}{|\underline{x} - \underline{x}'|}}$$

Ampére-törvény

$$\operatorname{div} \underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' j_\ell(\underline{x}) \partial_\ell^{\underline{x}'} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' j_\ell(\underline{x}) \partial_\ell^{\underline{x}'} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \left\{ \partial_\ell^{\underline{x}'} \left[j_\ell(\underline{x}) \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \right] - \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \operatorname{div} \underline{j}(\underline{x}') \right\} =$$

$$\boxed{\operatorname{div} \underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\operatorname{div} \underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} = 0}$$

mivel $\operatorname{div} \underline{j} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{\partial \varrho}{\partial t}}_{\text{ez } 0} = \operatorname{div} \underline{j}$ így ez 0

$$B_i(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \varepsilon_{ijk} j_k(\underline{x}') \underbrace{\partial_j^{\underline{x}'} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|}}_{-\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|^2} \cdot \frac{(\underline{x} - \underline{x}')_j}{|\underline{x} - \underline{x}'|}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \left[(\underline{x} - \underline{x}') \times \underline{j}(\underline{x}') \right]_i \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3}$$

$$\boxed{\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{\underline{j}(\underline{x}') \times (\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}}$$

Biot-Savart-törvény

→ Vékony vezetőre:

$$d^3x' \, \underline{j}(\underline{x}') = d\underset{\sim}{\underline{s}}^{\,\swarrow ds \cdot \underline{e}_{tang}} \, d^2x'_{\perp} \, I \, \delta(x'_{\perp} - \underline{x}(s))$$

$$\boxed{\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\underline{s} \times (\underline{x}-\underline{x}(s))}{|\underline{x}-\underline{x}(s)|^3}}$$

→ Nagy távolságra a forrástól → Multipólus sorfejtés: $|\underline{x}| >> |\underline{x}'|$

$$|\underline{x}-\underline{x}'| \approx |\underline{x}|\left(1 - \frac{\underline{x}\,\underline{x}'}{|\underline{x}|^2} + \ldots\right)$$, legyen $|\underline{x}| = r$, ezzel

$$\underline{A}(\underline{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\int d^3x' \, \underline{j}(\underline{x}')\left(1 + \frac{\underline{x}\,\underline{x}'}{\underbrace{|\underline{x}|^2}_{r^2}} + \ldots\right)$$

→ Első tag a mágneses monopólus tag, belátjuk, hogy zérus

$$\underline{A}^{(0)}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int d^3x' \, \underline{j}(\underline{x}')$$

A következő azonosságot alkalmazzuk:

$$\int d^3x' \, \partial_l^{x'}\left(j_l(x') f(x') g(x')\right) = 0 = \int d^3x' \, j_l \left(g \, \partial_l f + f \, \partial_l g\right) +$$

$$+ \int d^3\cancel{x' \, fg \, \partial_l} \, j_l \overset{\text{mivel } \mathrm{div}\, j = 0}{=}$$

Mivel f, g tetszőleges, így legyenek

$f = x'_i$, $g = 1$, ezzel

$$0 = \int d^3x' \, j_l \delta_{li} = \boxed{\int d^3x' \, j_i(\underline{x}') = 0}$$, azaz nincs monopól járulék

→ Nézzük a dipólus tagot:

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} x_l \int d^3x' \, j_i(x') \, x'_l =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} x_l \left[\frac{1}{2} \int d^3x' \left(j_i x'_l - j_l x'_i \right) + \overbrace{\frac{1}{2} \int d^3x' \left(j_i x'_l + j_l x'_i \right)}^{0} \right]$$

→ lövi ki, hogy szimm és antiszimm tagok legyenek

előbbi azonosságot alkalmazva: $f = x'_k$, $g = x'_i$

$$0 = \int d^3x' \, j_l \left(x'_k \delta_{li} + x'_i \delta_{lk} \right) = \int d^3x' \left(j_i x'_k + x'_i j_k \right) = 0$$

Tudjuk továbbá, hogy

$$(\underline{x}\underline{x}')\underline{j} - (\underline{x}\underline{j})\underline{x}' = \underline{x} \times (\underline{j} \times \underline{x}')$$, ezzel:

$$\boxed{\underline{A}^{(1)}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underline{x} \times \frac{1}{2} \int d^3x' \left(\underline{j}(\underline{x}') \times \underline{x}' \right)}$$

→ Vezessük be a mágneses-momentum vektort:

$$\boxed{\underline{m} = \frac{1}{2} \int d^3x' \, \underline{x}' \times \underline{j}(\underline{x}')}$$

Így:

~ origóba helyezett, pontszerű

$$\boxed{\underline{A}^{(1)}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underline{m} \times \underline{x}}$$

→ Mikroszkópikus ponttöltés árama:

$$\underline{j}(\underline{x}) = \sum_n q_n \underline{v}_n \delta^{(3)}(\underline{x}'-\underline{x}_n)$$, ezzel

$$\underline{m} = \sum_n q_n \frac{1}{2} \underline{x}_n \times \underbrace{\underline{v}_n \cdot m_n}_{} \overbrace{\frac{1}{m_n}}^{} =$$

bővítek a részecske tömegével

$$\boxed{\underline{m} = \sum_n \frac{q_n}{2 m_n} \underline{x}_n \times \underline{p}_n = \sum_n \frac{q_n}{2 m_n} \underline{L}_n}$$

→ Makroszkópikus magnetosztatika, mágnesezhetőség:

$$\mathrm{div}\, \underline{B}^{(makro)}(\underline{x}) = 0$$

$$\mathrm{rot}\, \underline{B}^{(makro)}(\underline{x}) = \mu_0 \underline{j}^{(m)}(\underline{x}) + ?$$

→ Mágneses momentum: $\boxed{\underline{M}(\underline{x}) = \sum_i n_i^{(x)} \underline{m}_i}$

→ térfogategység eredő momentuma

$$\boxed{\underline{A}^{(makro)}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \frac{\underline{j}^{(m)}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} - \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \frac{(\underline{x}-\underline{x}')\times \underline{M}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}}$$

Láttuk, hogy:

$$\partial_e^{x'} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \frac{x_e' - x_e}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} ,$$

$$\varepsilon_{ijk}\left(\partial_j^{x'} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\right) M_k(\underline{x}') = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j^{x'}\left(\frac{M_k}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\right) \overbrace{- \varepsilon_{ijk}\left(\partial_j^{x'} M_k(\underline{x}')\right) \cdot \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}}^{-(\mathrm{rot}\, M)_i \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}}$$

Ezeket beirva:

$$\boxed{\underline{A}^{(\text{makro})}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\left(\underline{j}^{(n)}(\underline{x}') + \text{rot}\,\underline{M}(\underline{x}')\right)}$$

↓

$$\boxed{\text{rot}\,\underline{B} = \mu_0\left(\underline{j}^{(n)}(\underline{x}) + \underbrace{\text{rot}\,\underline{M}(\underline{x})}_{\text{mágnesezettségi áramsűrűség}}\right)}$$

→ Mágneses térerősség: $\boxed{\underline{H}(\underline{x}) = \frac{1}{\mu_0}\underline{B}(\underline{x}) - \underline{M}(\underline{x})}$

→ Mágneses indukció: $\boxed{\underline{B}(\underline{x}) = \mu_0(\underline{H} + \underline{M})}$

Ha a linearitás fennáll: $\boxed{\underline{M} = \chi_m \underline{H}}$, ahol χ_m mágneses szuszceptibilitás

akkor $\boxed{\underline{B} = \mu_0(1+\chi_m)\underline{H}}$

$$\boxed{\begin{gathered} 1+\chi_m = \mu_r \\ \mu_0(1+\chi_m) = \mu_0\mu_r = \mu \end{gathered}}$$

↓

$$\boxed{\underline{B} = \mu H}$$

Anyagok osztályozása:

$\chi_m > 0$ → paramágnes

$\chi_m < 0$ → diamágnes

$\chi_m \gg 1$ → ferromágnes

→ speciális esetben, ha $\underline{j}_{sz}^{(m)} = \underline{0}$, akkor $\boxed{\text{rot}\,\underline{H} = 0}$

→ mágneses skalárpotenciál: $\boxed{\underline{H} = -\,\text{grad}\,\Phi_m}$

$\text{div}\,\frac{1}{\mu_0}\underline{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{div}\,\underline{H} = -\,\text{div}\,\underline{M}}$

→ mágneses töltéssűrűség: $\boxed{\rho_m = -\,\text{div}\,\underline{M}}$

→ Hullámegyenlet felírható: $\boxed{\Delta\Phi_m = \rho_m}$

Megoldva: $$\boxed{\Phi_m(\underline{x})} = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{\text{div}\,\underline{M}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \overset{\text{parc. int}}{=} \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \, \underline{M}(\underline{x}') \overset{\text{grad}_{\underline{x}'}}{\underline{\nabla}_{\underline{x}'}} \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} =$$

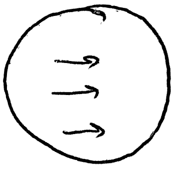
$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\int d^3x' \, M_\ell \partial_\ell^x \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\right) = -\frac{1}{4\pi}\underline{\nabla}_{\underline{x}} \int d^3x' \, \frac{\underline{M}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

→ Multipólus sorfejtés, $|\underline{x}| >> |\underline{x}'|$

$$\Phi_m^{(1)} = -\frac{1}{4\pi}\underline{\nabla}_{\underline{x}} \frac{1}{|\underline{x}|} \cdot \underline{m}, \quad \text{ahol} \quad \underline{m} = \int d^3x' \, \underline{M}(\underline{x}')$$

$$\boxed{\Phi_m^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\underline{m}\,\underline{x}}{|\underline{x}|^3}}$$

→ Példa: Mágnesezett gömb Φ_m-je:



Elektrosztatikai analógia alapján: $\underline{H}_b = \frac{1}{3}\underline{M}$

→ lásd előbb

Kint dipólus, bent homogén

$$\Phi_m = -H_b z = -H_b r P_1$$

Φ_m határon folytonosan megy át:

$$-H_b R P_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{m}{R^2}P_1$$

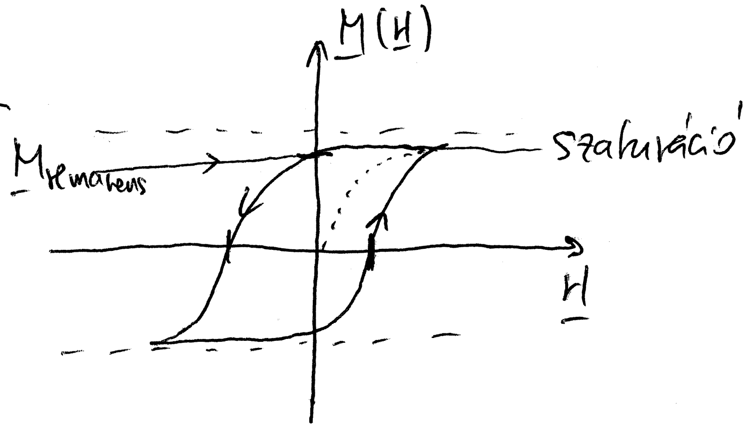
$$\underline{m} = \frac{4\pi}{3}\underline{M}R^3$$

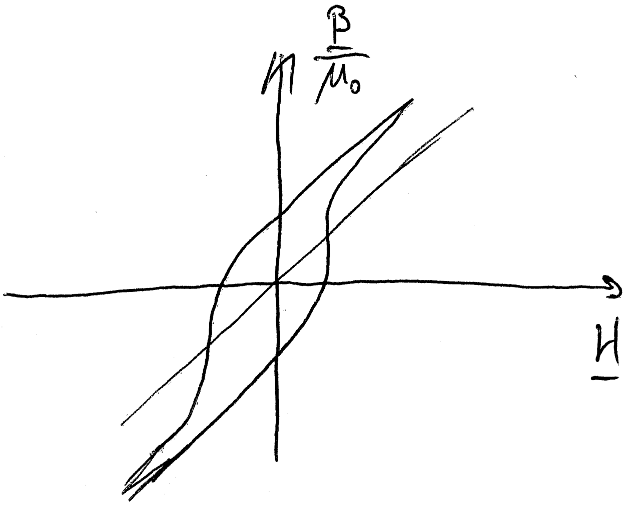
$$-H_b = \frac{1}{\cancel{4\pi}}\frac{\cancel{4\pi}}{3}M = \boxed{\frac{M}{3} = -H_b}$$

$$\underline{B}_b = \mu_0(H+M) = \boxed{\frac{2\mu_0}{3}\underline{M} = \underline{B}_b}$$

Ferromágnesség: $\chi_m >> 1$

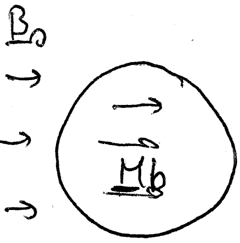
Hiszterézis:





Példa: Mágnesezhető gömb külső térben:

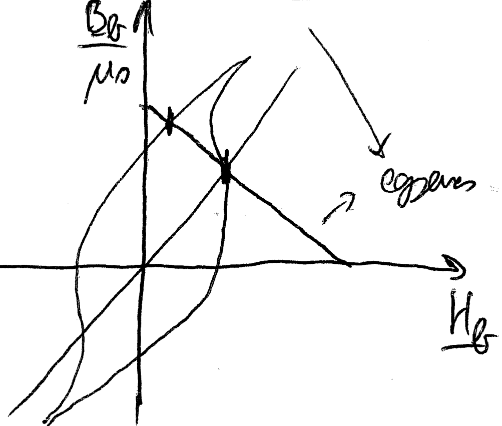
távol: $\underline{B}_0 = \mu_0 \underline{H}_0$



$$\boxed{\begin{aligned} \underline{B}_b &= \underline{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3}\underline{M} \\ \underline{H}_b &= \frac{1}{\mu_0}\underline{B}_0 - \frac{1}{3}\underline{M} \end{aligned}}$$

Megoldás: $\boxed{\mu_0 \cdot 2\underline{H}_b + \underline{B}_b = 3\underline{B}_0}$ csak grafikusan,

2 megoldás



→ Szupravezetők magnetosztatikája:

→ tökéletes diamágnesség: $\boxed{\underline{B} = \underline{0} = \mu_0(\underline{H}+\underline{M})}$

$$\to \underline{H} = -\underline{M}$$

$$\boxed{\chi_m^{(szupra)} = -1}$$

Meissner-effektus

→ London-egyenlet:

$$j^{(makro)} = j^{(normál)} + j^{(szupra)}$$

→ szupravezető töltéshordozók „folyadékot" alkotnak
→ két-folyadék elmélet
Tisza László

$$\boxed{j^{szupra} = n_s e^* \underline{v}} \leftarrow \text{sebesség}$$

j^{szupra} ↓ j_s

n_s ↓ szupra sűrűség

↓ Cooper-pár töltése $2e^-$

$$\frac{\partial j_s}{\partial t} = n_s e^* \dot{\underline{v}} = n_s e^* \frac{e^*}{m^*}\underline{E}$$

↑ effektív tömeg

Felhasználva, hogy $\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(j_s + \frac{n_s e^{*2}}{m^*}\underline{A}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{j_s = -\frac{n_s e^{*2}}{m^*}\underline{A}}$$

Ha $\underline{A}=0 \to j_s=0$

→ Landau - Ginzburg elmélet:

→ gerjesztési törvény módosítása kétféle áramra

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j}_{normál} + \underline{j}_{szupra} = \underline{j}_n - \frac{n_s e^{*2}}{m^*}\underline{A}}$$

Legyen $\underline{j}_n = \underline{0}$, ekkor:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{H} = \underbrace{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\underline{H}}_{0} - \Delta\underline{H} = -\frac{n_s e^{*2}}{m^*}\underline{B} = -\frac{n_s e^{*2}}{m^*}\mu\underline{H},$$

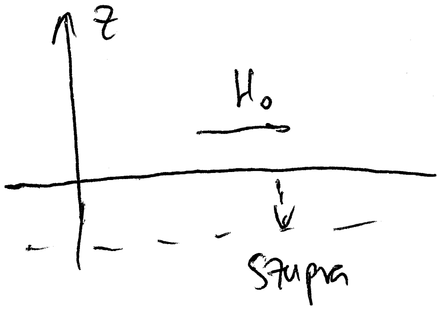
mivel $\mathrm{rot}\,\underline{A} = \underline{B}$, $\underline{B} = \mu\underline{H}$

Legyen $\boxed{\lambda^{-2} = \frac{n_s e^{*2}}{m^*}\mu \approx \frac{2 n_s e^2}{m_e}\mu}$ → λ^{-1} → inverz behatolási mélység.

Ezzel

$$\boxed{\Delta\underline{H} = \frac{1}{\lambda^2}\underline{H}}$$

→ Vegyünk egy speciális esetet:



$$\frac{d^2 H_t}{dz^2} = \frac{1}{\lambda^2} H_t$$

megoldva: $H_t = H_0 e^{\pm\frac{z}{\lambda}}$

fizikailag ok: $\boxed{H_t = H_0 e^{+\frac{z}{\lambda}}}$

→ exp lecsengés

→ Magnetosztatikai energiasűrűség:

$$\delta E_{mech} = \delta t \int \underline{j}\,\underline{E}'\, d^3x$$

Ideális vezetőre:

$$\delta E_{mech} = \delta t I \int d\underline{s} \cdot \underline{E}'$$

→ Indukciótörvényt használva:

$$\boxed{\int_C d\underline{s}\,\underline{E}' = -\frac{d\Psi_M}{dt}}$$

ahol Ψ_M a mágneses fluxus

$$\Psi_M = \int_F d\underline{F}\,\underline{B}$$

Ezzel:

$$\boxed{\delta E_{mech} = -I\,\delta\Psi_M}$$

Feltéve, hogy $\boxed{\delta E_{mech} + \delta E_{mágn} = 0}$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\delta E_{mágn} = I\,\delta\Psi_M}$$

Továbbírva:

$$\delta E_{mágn} = I \int_F d\underline{F}\,\delta\underline{B}(\underline{x}) = I \int_F d\underline{F}\,\text{rot}\,\delta\underline{A} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Stokes}}}{=} I \int d\underline{s}\,\delta\underline{A} =$$

$$\delta E_{mágn} = \int d^3x\, \underline{j}(\underline{x})\,\delta\underline{A}(\underline{x}) \overset{\substack{\text{Forrás kiküszöbölése}\\ \downarrow}}{=} \int d^3x\, \text{rot}\,\underline{H}\,\delta\underline{A}$$

→ rot $\underline{H}$-t el akarom tüntetni

→ Gauss-tétel alkalmazása:

$$\mathrm{rot}\,\underline{H}\cdot\delta\underline{A} = \underbrace{-\mathrm{div}\left(\underline{H}\times\delta\underline{A}\right)}_{0} + \underline{H}\,\mathrm{rot}\,\delta\underline{A}$$

Így:

$$\delta E_{\text{mágn}} = \int d^3x\ \underline{H}\ \mathrm{rot}\,\delta\underline{A} = \int d^3x\ \underline{H}\ \overbrace{\mathrm{rot}\,\delta\underline{A}}^{\delta B} = \boxed{\int d^3x\ \underline{H}\,\delta\underline{B} = \delta E_{\text{mágn}}}$$

→ <u>anyagfüggetlen</u>

→ Termodinamika I. főtétele:

$$\boxed{\delta Q = p\,\delta V + \delta \mathcal{E}_b + V_m \underline{H}\,\delta\underline{B}}$$

$$\int d^3x\ \underline{H}\,\delta\underline{B} = \delta E_{\text{mágn}} = \delta\int d^3x\ \underline{H}\underline{B} - \int d^3x\ \underline{B}\,\delta\underline{H}$$

$$\delta\left(E_{\text{mágn}} - V_{\text{minta}}\,\underline{H}\underline{B}\right) = -V_{\text{minta}}\underbrace{\underline{B}\,\delta\underline{H}}$$

hiszterézis görbe által bezárt terület

Ha <u>lineáris</u>, azaz $\delta\underline{B} = \mu\,\delta\underline{H}$, akkor

$$\boxed{E_{\text{mágn}} = \frac{1}{2}\mu\int \underline{H}^2\,d^3x}$$

→ **Elektromágneses indukció:**

→ Mozgási — nyugalmi

$$\underbrace{\overset{\text{Mozgási}}{\downarrow}\ \text{kontúr mozog} \qquad \overset{\text{nyugalmi}}{\downarrow}\ \text{térerősség változik}}_{\text{matematikailag ugyanaz}}$$

(fiz is, koordtól független)

mozgó kontúr:

$$\delta t \int \underline{B}\, d\underline{F} = \underbrace{\int \frac{\partial B}{\partial t} \delta t\, d\underline{F}}_{\text{tér változik}} + \underbrace{\int \frac{\partial}{\partial x_j} \underline{B}\, v_j \delta t\, d\underline{F}}_{\text{kontúr mozog}}$$

$$\underbrace{\text{kontúr mozog}}_{\underbrace{(\underline{v}\underline{\nabla})\underline{B} - \underline{v}\underbrace{(\underline{\nabla}\underline{B})}_{0}}_{\text{rot}(\underline{B}\times\underline{v})}}$$

$$-\oint_c \underline{E}' d\underline{s} = \frac{d\Psi_M}{dt} = -\int d\underline{F}\left(\underbrace{\frac{\partial B}{\partial t}}_{\text{Maxwell: } -\text{rot}\,\underline{E}} + \text{rot}(\underline{B}\times\underline{v})\right) =$$

$$= -\int_F \text{rot}\left[\underline{E} + (\underline{v}\times\underline{B})\right] d\underline{F} \overset{\text{Stokes}}{=} -\oint_c (\underline{E} + \underline{v}\times\underline{B})\, d\underline{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overset{\text{áramkörrel együtt mozgó}}{\underline{E}'} = \overset{\text{lab rendsz.}}{\underline{E}} + \underline{v}\times\underline{B}}$$

→ Lorentz-erő:

$$\boxed{\underline{F} = q\underline{E}' = q(\underline{E} + \underline{v}\times\underline{B})}$$

→ Maxwell-egyenletek anyag jelenlétében:

$$\boxed{\rho_{pol} = -\operatorname{div} \underline{P}}$$ láttuk

$$\boxed{\frac{\partial \rho_{pol}}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j}_{pol} = 0}$$ tudjuk

$\underline{P}$ – dipólmomentum sűrűség

$$\operatorname{div}\left(-\frac{\partial \underline{P}}{\partial t} + \underline{j}_{pol}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\underline{j}_{pol} = \dot{\underline{P}}}$$

$$\operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \left(\underline{j}^{(makr)} + \underline{M} + \dot{\underline{P}} + \varepsilon_0 \dot{\underline{E}} \right)$$

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

⇒ Innen:

$$\boxed{\begin{array}{c|c} \operatorname{div} \underline{D} = \rho^{(makr)} & \operatorname{div} \underline{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \underline{H} = \underline{j}^{(makr)} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \end{array}}$$

6. Tétel: Határozott frekvenciájú források:

→ Fourier-transzformációval járunk el:

$$\left.\begin{aligned} \varrho^{(m)}(\underline{x},t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \varrho_\omega(\underline{x})\, e^{-i\omega t} \\ j^{(m)}(\underline{x},t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, j_\omega(\underline{x})\, e^{-i\omega t} \end{aligned}\right\} \boxed{\operatorname{div} j_\omega(\underline{x}) = i\omega\, \varrho_\omega(\underline{x})}$$

$$\underline{H}(\underline{x},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \underline{H}_\omega(\underline{x})\, e^{-i\omega t}$$

→ Rot $\underline{H}$-s Maxwellbe beírás

$$\underline{D}(\underline{x},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \underline{D}_\omega(\underline{x})\, e^{-i\omega t}$$

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \left[\operatorname{rot} \underline{H}_\omega(\underline{x}) - j^{(m)}_\omega(\underline{x}) + i\omega\, \underline{D}_\omega(\underline{x})\right] e^{-i\omega t} = 0$$

↓

→ Maxwell-egyenletek transzformálhatóak:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot} \underline{H}_\omega(\underline{x}) &= j^{(m)}_\omega - i\omega\, \underline{D}_\omega(\underline{x}) \\ \operatorname{rot} \underline{E}_\omega(\underline{x}) &= i\omega\, \underline{B}_\omega(\underline{x}) \\ \operatorname{div} \underline{B}_\omega(\underline{x}) &= 0 \\ \operatorname{div} \underline{D}_\omega(\underline{x}) &= \varrho^{(m)}_\omega(\underline{x}) \end{aligned}}$$

→ terek valósak, így

$$\int \frac{d\omega}{2\pi}\, \underline{D}_\omega(\underline{x})\, e^{-i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \underline{D}^*_\omega(\underline{x})\, e^{i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \underline{D}^*_{-\omega}(\underline{x})\, e^{-i\omega t}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

→ Energiasűrűség átlaga határozott frekvenciára:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0\int d^3x\,\frac{1}{T}\int_0^T\left(\underline{E}_\omega e^{-i\omega t}+\underline{E}^*_\omega e^{i\omega t}\right)\left(\underline{E}_\omega e^{-i\omega t}+\underline{E}^*_\omega e^{i\omega t}\right)\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{1}{8}\varepsilon_0\int d^3x\left[|\underline{E}_\omega|^2+|\underline{E}_\omega|^2\right]=\frac{1}{4}\varepsilon_0\int d^3x\,|\underline{E}_\omega|^2$$

B-re ugyanígy eljárva:

$$\boxed{\overline{S_{E,\omega}}^T=\frac{1}{4}\left[\varepsilon_0|\underline{E}_\omega(\underline{x})|^2+\frac{1}{\mu_0}|\underline{B}_\omega(\underline{x})|^2\right]}$$

→ Energiaáram-sűrűség: (Poynting-vektor)

$$\int d\underline{F}\,\overline{\underline{S}_\omega}^T=\frac{1}{\mu_0}\int d\underline{F}\,\frac{1}{T}\int_0^T dt\left(\underline{E}^*_\omega e^{i\omega t}+\underline{E}_\omega e^{-i\omega t}\right)\times\left(\underline{B}^*_\omega e^{i\omega t}+\underline{B}_\omega e^{-i\omega t}\right)\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{1}{4\mu_0}\int d\underline{F}\left(\underline{E}^*_\omega\times\underline{B}^*_\omega+\underline{E}_\omega\times\underline{B}^*_\omega\right)$$

két tiszta rész kiejti egymást

$$\boxed{\overline{\underline{S}_\omega}^T=\frac{1}{4\mu_0}\left(\underline{E}^*_\omega\times\underline{B}_\omega+\underline{E}_\omega\times\underline{B}^*_\omega\right)=\frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left(\underline{E}_\omega\times\underline{B}^*_\omega\right)}$$

→ Frekvenciafüggő állandók bevezetése:

$$\underline{P}_\omega(\underline{x}) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \underline{E}_\omega(\underline{x})$$

Tudjuk, hogy: $\underline{D}_\omega(\underline{x}) = \varepsilon(\omega) \underline{E}_\omega(\underline{x})$ → lineáris polarizálhatóság

→ Rugalmasan kötött e^- - modell esetében:

$$m\ddot{\underline{x}} = -\xi\dot{\underline{x}} - m\omega_0^2\underline{x} + \overbrace{q\frac{1}{2}\left(\underline{E}_\omega(\underline{x})e^{-i\omega t} + \underline{E}_\omega^*(\underline{x})e^{i\omega t}\right)}^{\mathrm{Re}\, q\underline{E}(\omega)e^{-i\omega t}}$$

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{2}\left(\underline{x}_\omega e^{-i\omega t} + \underline{x}_\omega^* e^{i\omega t}\right)$$; ~ $x = x_0 e^{-i\omega t}$

↳ hakírozott felével ezt is

Beírva:

$$-\omega^2 m\underline{x}_\omega = i\omega\xi\underline{x}_\omega - m\omega_0^2\underline{x}_\omega + q\underline{E}_\omega$$

$$\boxed{q\underline{x}_\omega = \underline{p}_\omega = \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - i\omega\frac{\xi}{m} - \omega^2)}\underline{E}_\omega}$$

$$\underline{P}_\omega = N\underline{p}_\omega$$

→ Innen $\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0\chi_e(\omega) = \frac{Nq^2}{m(\omega_0^2 - i\omega\frac{\xi}{m} - \omega^2)}}$

→ Ohm-törvény:

$$\boxed{\underline{j}_\omega = \sigma(\omega)\underline{E}_\omega(\underline{x})}$$

→ $\underline{P}_\omega = \varepsilon_0\chi_e(\omega)\underline{E}_\omega$

↓

$$\underline{P}(t) = \varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\chi_e(\omega)\underline{E}_\omega e^{-i\omega t}$$, ahol

$$\chi_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{i\omega\tau}\, \chi(\tau)$$ és

$$\underline{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau'\, e^{i\omega\tau'}\, \underline{E}(\tau')$$

Beírva:

$$\underline{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau'\, \chi_e(\tau)\, \underline{E}(\tau') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(\tau+\tau'-t)}}_{\delta(\tau+\tau'-t)} =$$

$$\underline{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau'\, \chi_e(\tau)\, E(\tau')\, \delta(\tau+\tau'-t) =$$

$$\boxed{\underline{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \chi_e(\tau)\, \underline{E}(t-\tau)}$$ konvolúció

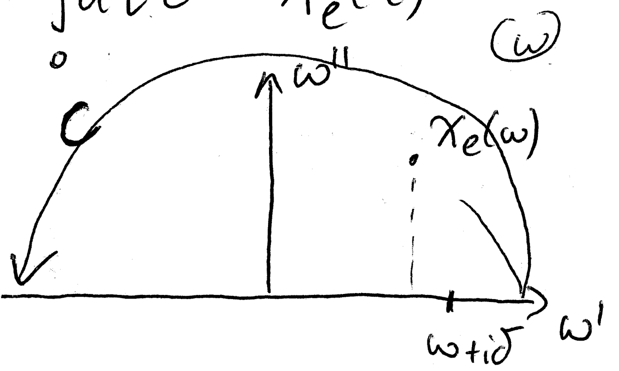
Innen:

$$\boxed{\underline{D}(\underline{x},t) = \varepsilon_0 \left(\underline{E}(\underline{x},t) + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \chi_e(\tau)\, \underline{E}(\underline{x},t-\tau) \right)}$$

→ Kauzalitás és a Kramers-Kronig-relációk:

→ kauzalitás miatt $\boxed{\chi_e(\tau<0)=0}$, ezzel

$$\chi_e(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{i\omega\tau}\chi_e(\tau)=\int_{0}^{\infty} d\tau\, e^{i\omega\tau}\chi_e(\tau)$$



ω<0-ra kiterjeszthető:

$$\boxed{\chi_e(-\omega)=\chi_e^*(\omega)}$$

A fenti integrál konvergens, ha Im ω > 0.

↳ felső félsíkon analitikus

Ekkor $\omega=\omega'+i\omega''$ alakú, $\omega''>0$.

→ Cauchy-előállítás:

$$\chi_e(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega'$$

kontúrt úgy választjuk, hogy a modellhez illeszkedjen:

$$\boxed{\begin{array}{c} \chi_e(\omega) \\ |\omega| \to \infty \\ \downarrow \\ 0 \end{array}} \quad \text{azaz} \quad \lim_{|\omega|\to\infty}\chi_e(\omega)\longrightarrow\frac{1}{|\omega|^{1+\varepsilon}}$$

→ valós és képzetes rész nem független.

→ valós tengelytől eltolom a szingularitást: $\omega\to\omega+i\delta$, $\delta\to 0$

Ezzel:

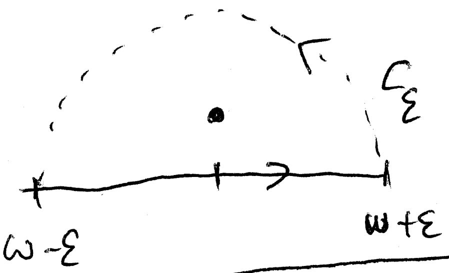
$$\chi_e(\omega+i\delta)=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\,\frac{\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega-i\delta}$$

→ Kiszámítás Főérték-integrál segítségével:

→ szingularitás figyelmen kívül hagyása, kihagyom az integrálból

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}d\omega'\,\frac{\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\omega-\varepsilon}+\int_{\omega+\varepsilon}^{\infty}\right)d\omega'\,\frac{\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega}$$

→ Szinguláris tartomány járuléka, segédkontúrral:



→ A nagy kör járuléka 0.

→ csak a vonal fog számítani

$$\boxed{\chi_e(\omega+i\delta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon}d\bar{\omega}\,\frac{\chi_e(\bar{\omega})}{\bar{\omega}-\omega-i\delta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-\varepsilon}^{\omega+\varepsilon}\frac{\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega-i\delta}+\frac{1}{2}\chi_e(\omega+i\delta)}$$

Ezzel: (az egész)

$$\chi_e(\omega+i\delta)=\frac{1}{2\pi i}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\,\frac{\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega}+\frac{1}{2}\chi_e(\omega+i\delta)$$

$$\boxed{\chi_e(\omega)=\frac{1}{\pi i}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\,\frac{\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega}}$$

→ Kramers-Krönig-reláció:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\chi_e(\omega)&=\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\,\frac{\mathrm{Im}\,\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega}\\ \mathrm{Im}\,\chi_e(\omega)&=-\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\,\frac{\mathrm{Re}\,\chi_e(\omega')}{\omega'-\omega}\end{aligned}}$$

↳ amplitúdót csökkenti

→ diszperziós reláció:

$$\boxed{c=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega)\mu}}}$$

→ $1/\lambda \sim \mathrm{Im}\,\varepsilon$

→ Energiamegmaradás határozott frekvenciájú terekre:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{dE_{mech}}{dt} = \int d^3x\left(\frac{1}{T}\int_0^T dt\, j(\underline{x},t)\,\underline{E}(\underline{x},t)\right) = \overline{\frac{dE_{mech}}{dt}}^{T}$$

Láttuk, hogy:

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\left(\underline{E}_\omega(\underline{x})e^{-i\omega t} + \underline{E}_\omega^*(\underline{x})e^{i\omega t}\right)$$

$$j(x,t) = \frac{1}{2}\left(j_\omega(\underline{x})e^{-i\omega t} + j_\omega^*(\underline{x})e^{i\omega t}\right)$$

Beírva:

$$\overline{\frac{dE_{mech}}{dt}}^{T} = \frac{1}{4}\int d^3x\left(j_\omega(\underline{x})\underline{E}_\omega^*(\underline{x}) + j_\omega^*(\underline{x})\underline{E}_\omega(\underline{x})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3x \; \mathrm{Re}\left(j_\omega^*(x)\underline{E}_\omega(\underline{x})\right) =$$

Felhasználjuk, hogy: $j_\omega^*(x) = \mathrm{rot}\,\underline{H}_\omega^*(\underline{x}) - i\omega\,\underline{D}_\omega^*(\underline{x})$.

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int d^3x\left(\underbrace{\mathrm{rot}\,\underline{H}_\omega^*} - i\omega\,\underline{D}_\omega^*\right)\underbrace{\underline{E}_\omega} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int d^3x\left[\overbrace{-\mathrm{div}\left(\underline{E}_\omega\times\underline{H}_\omega^*\right) + \left(\mathrm{rot}\,\underline{E}_\omega\right)\underline{H}_\omega^*} - i\omega\,\underline{D}_\omega^*\underline{E}_\omega\right] =$$

$$\boxed{\overline{\frac{dE_{mech}}{dt}}^{T} = -\mathrm{Re}\oint d\underline{F}\;\frac{1}{2}\left(\underline{E}_\omega\times\underline{H}_\omega^*\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int d^3x\; i\omega\left(\underline{B}_\omega\underline{H}_\omega^* - \underline{D}_\omega^*\underline{E}_\omega\right)}$$

mivel $\mathrm{rot}\,\underline{E}_\omega = i\omega\,\underline{B}_\omega$

→ Komplex Poynting-vektor:

$$\boxed{\underline{S}_\omega = \frac{1}{2}\left(\underline{E}_\omega\times\underline{H}_\omega^*\right)}$$

átlagos kisugárzott energia:

elektr → $W_e = \frac{1}{4}\underline{E}_\omega\underline{D}_\omega^*$

mágn → $W_m = \frac{1}{4}\underline{B}_\omega\underline{H}_\omega^*$

→ Ezekkel mérlegegyenletet tudunk felírni, amivel később a koncentrált áramköri elemek származtathatóak:

$$\boxed{\frac{1}{2}\int d^3x\, j_\omega^* \underline{E}_\omega + \int d\underline{F}\cdot\underline{S}_\omega + 2i\omega\int d^3x\,(w_e - w_m) = 0}$$

↳ ezt az átlagos energiaformulába írtuk be, → első tag: Joule hő
a Poynting-vektor felhasználásával.

→ koncentrált, lineáris áramköri elemek:

Joule hő: $\frac{1}{2}\mathrm{Re}(IV^*)$

→ Ohmikus ellenállás:

$$\boxed{j_\omega = \sigma(\omega)\underline{E}_\omega}$$ → ezt tudjuk

$$\frac{1}{2}\int d^3x\, j_\omega^* \underline{E}_\omega = \underline{\frac{1}{2\sigma(\omega)}\int d^3x\,|j_\omega|^2} =$$

drót mentén: $\int d^3x |j_\omega|^2 = \underbrace{\frac{I^2}{F^2}}_{|j_\omega|^2}\underbrace{Fl}_{\int d^3x}$, ahol F a keresztmetszet

$$= \boxed{\frac{l}{2\sigma F}|I_\omega|^2 = Q_J}$$

Ezenkívül:

$V = ZI$, ahol $Z = R - iX$ impedancia

$IV^* = I(R+iX)I^*$ – ezt beírva:

$$\boxed{Q_J = \frac{1}{2}R|I_\omega|^2}$$

$$\boxed{R = \frac{l}{\sigma F}}$$

→ Kapacitás:

$$\boxed{\phi_\omega = \frac{1}{C} Q_\omega} \qquad \frac{1}{2}\mathrm{Im}(IV^*) = -\frac{1}{2} X_C |I_\omega|^2$$

$$Q_C = 2i\omega \int d^3x\, w_e = \frac{i\omega}{2}\int d^3x\, \underline{E}_\omega \underline{D}_\omega^* = \frac{i\omega}{2}\int d^3x\,(-\mathrm{grad}\,\phi_\omega)\underline{D}_\omega^* =$$

$$= \frac{i\omega}{2}\int d^3x\, \phi_\omega \varrho_\omega^* \simeq \frac{i\omega}{2}\phi_\omega \cdot Q_\omega^* = \boxed{\frac{i\omega}{2C}|Q_\omega|^2 = Q_C}$$

Mivel $I = \frac{dQ}{dt} \rightarrow \underline{I_\omega = -i\omega Q_\omega}$, így:

$$\boxed{Q_C = \frac{i}{2\omega C}|I_\omega|^2}$$

Fentiek alapján: $-\frac{1}{2}X|I_\omega|^2 = -\frac{1}{2}X_C|Q_\omega|^2\omega^2$

$$\boxed{X_C = -\frac{1}{\omega C}}$$

→ Induktivitás:

$$\boxed{\Psi_{M,\omega} = L I_\omega}$$

parc. integrálásból.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$$Q_L = -i|I_\omega|^2 X_L \cdot \frac{1}{2} = -2\omega i \cdot \frac{1}{4}\int d^3x\, \underline{B}_\omega \underline{H}_\omega^* = -\frac{\textcircled{i\omega}}{2}\int d^3x\, j_\omega^* \underline{A}_\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3x\, j_\omega^* \underline{\dot{A}}_\omega = -\frac{1}{2}\int d^3x\, j_\omega^* \underline{E}_\omega \simeq -\frac{1}{2} I_\omega^* \int d\underline{s}\, \underline{E}_\omega =$$

$$= \frac{1}{2} I_\omega^* \dot{\Psi}_{M,\omega} = -\frac{i\omega}{2} I_\omega^* \Psi_{M,\omega} = \boxed{-\frac{i\omega}{2}|I_\omega|^2 L = Q_L}, \quad \boxed{X_L = \omega L}$$

→ Minden tagot egybeírva, a sugárzási tagot elhagyva az energiamérleg:

$$\boxed{\frac{1}{2}|I_\omega|^2\left(\frac{l}{\sigma F}+\frac{i}{\omega C}-i\omega L\right)\equiv\frac{1}{2}I_\omega V_\omega^*}\quad , \quad V_\omega = Z I_\omega$$

→ Kvázistacionárius közelítés:

$$\mathrm{rot}\,\underline{H}_\omega(\underline{x}) = \underline{j}_\omega^{(m)}(\underline{x}) + i\omega\underline{D}_\omega(\underline{x}) \overset{\text{Ohm}}{=} \sigma(\omega)\underline{E}_\omega(\underline{x}) + \cancel{i\omega\varepsilon(\omega)\underline{E}_\omega(\underline{x})}$$

Kis frekvencián: $\boxed{|\sigma(\omega)| \gg \omega|\varepsilon(\omega)|}$ → második tag elhagyható

Ekkor $\boxed{i\omega\rho_\omega = \mathrm{div}\,\underline{j}_\omega(\underline{x}) \approx 0}$

$$\mathrm{rot}\,\underline{H}_\omega \approx \sigma\underline{E}_\omega$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{E}_\omega = i\omega\underline{B}_\omega \overset{\text{lin. anyagra}}{=} i\omega\mu\underline{H}_\omega$$

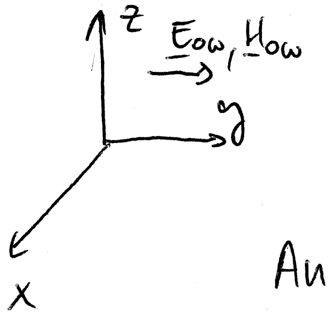
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{H}_\omega = \mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\underline{H}_\omega}_{0} - \Delta\underline{H}_\omega = \sigma(\omega)\,\mathrm{rot}\,\underline{E}_\omega = i\sigma\mu\omega\underline{H}_\omega$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\underline{E}_\omega = i\omega\mu\,\mathrm{rot}\,\underline{H}_\omega = i\omega\mu\sigma\underline{E}_\omega$$

→ Ezzel a hullámegyenletek:

$$\boxed{\left(\Delta + i\omega\mu\sigma\right)\begin{pmatrix}\underline{E}_\omega(\underline{x})\\ \underline{H}_\omega(\underline{x})\end{pmatrix} = \underline{0}}$$

Skin-hatás: vákuum oldalon tangenciális ω-frekijú gerjesztés



$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+i\sigma\omega\mu\right)\begin{pmatrix}\underline{E}_t(z)\\ \underline{H}_t(z)\end{pmatrix}=0$$

Ansatz: $\underline{H}_\omega=\underline{H}(z=0)\,e^{ikz}$

beírva a diszperziós reláció:

$$\boxed{k^2=i\omega\sigma\mu}$$

$$k^2=e^{i\frac{\pi}{2}}\sigma\omega\mu$$

$$\downarrow$$

$$k=\pm\sqrt{\sigma\mu\omega}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=\boxed{\pm\sqrt{\sigma\mu\omega}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=k}$$

k-t keressük a következő alakban: $k=k'+ik''$

akkor $e^{ikz}\to e^{\pm k''z}$

→ z irányban nincs gerjedés → ⊕

Legyen továbbá $\boxed{\delta=\sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}}}$ karakterisztikus behatolási mélység

Ezzel: $e^{-ikz}=e^{-iz(1+i)/\delta}=e^{-i\frac{z}{\delta}}\,e^{\frac{z}{\delta}}$

Így a megoldás:

$$\boxed{\begin{pmatrix}\underline{H}_\omega(z)\\ \underline{E}_\omega(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{H}_{t0}\\ \underline{E}_{t0}\end{pmatrix}e^{-i\frac{z}{\delta}}\,e^{\frac{z}{\delta}}}$$

⇒ Bővben a Joule-hő:

$$\underline{E}_\omega = \frac{1}{\sigma}\underline{H}_\omega = \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\delta}(1+i)\,i\,\underline{H}_\omega \times \underline{e}_z$$

$$j_\omega = \sigma \underline{E}_\omega = \frac{1}{\delta}(1+i)\,i\,\underline{H}_\omega \times \underline{e}_z$$

Ennek tudatában:

$$Q_J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} dz\, \mathrm{Re}\, j_\omega^{*}\,\underline{E}_\omega = \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma\delta^2}|1-i|^2\int_{-\infty}^{0} dz\,|\underline{H}_\omega^{(z)}|^2 =$$

$$= \frac{1}{\delta^2\sigma}\,\underline{H}_{t0}^2\int_{-\infty}^{0} dz\, e^{\frac{2z}{\delta}} = \boxed{\frac{1}{2\sigma\delta}\,\underline{H}_{t0}^2 = Q_J}$$

7. tétel: Sugárzások, Az elektromágneses síkhullám:

⇒ Határozott frekvencia, harmonikus időfüggést veszünk.

→ Maxwell egyenletek ekkor:

$\mathrm{rot}\,\underline{E}_\omega = i\omega \underline{B}_\omega$	$\mathrm{div}\,\underline{B}_\omega = 0$
$\mathrm{rot}\,\underline{H}_\omega = -i\omega \underline{D}_\omega \overset{\text{lin.pol.}}{=} -i\omega\varepsilon(\omega)\underline{E}_\omega$	$\mathrm{div}\,\underline{D}_\omega = 0$

→ egymásba behelyettesítve a hullámegyenletek: (másodikat még egyszer rot)

$$-\Delta \underline{H}_\omega = -i\omega\varepsilon(\omega)\cdot i\omega\mu \underline{H}_\omega$$

, másikra ugyanígy, rendezve:

$$\boxed{\begin{aligned}\left[\Delta + \omega^2\mu\varepsilon(\omega)\right]\underline{H}_\omega(\underline{x}) &= 0\\ \left[\Delta + \omega^2\mu\varepsilon(\omega)\right]\underline{E}_\omega(\underline{x}) &= 0\end{aligned}}$$

→ hullámmegoldást keresünk, nem csak t-ben, hanem $\underline{x}$-ben is periodikus:

legyen $\underline{k} = k\underline{n}$ a hullámszámvektor.

Ansatz: $\boxed{\underline{H}_\omega(\underline{x}) = \underline{H}_0 e^{ik\underline{n}\underline{x}}}$, behelyettesítve:

$$\left[-k^2 + \omega^2\varepsilon(\omega)\mu\right]\underline{H}_0 = \underline{0}$$

, innen

$$\boxed{\omega = \frac{k}{\sqrt{\mu\varepsilon(\omega)}}}$$

diszperziós reláció

→ fázissebesség: $\sqrt{\mu\varepsilon(\omega)} = \frac{1}{v_f} \Rightarrow \boxed{v_f = \frac{\omega}{k}}$

→ teljes megoldások:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{H}_\omega(\underline{x},t) &= \underline{H}_0 e^{ik\underline{n}\underline{x} - i\omega t}\\ \underline{E}_\omega(\underline{x},t) &= \underline{E}_0 e^{ik\underline{n}\underline{x} - i\omega t}\end{aligned}}$$

→ beírjuk őket a dives Maxwellbe:

$$\text{div}\,\underline{H}_\omega = \underline{0} = ik\underline{n}\underline{H}_0 e^{ik\underline{n}\underline{x}} \rightarrow \boxed{\underline{n}\underline{H}_0 = 0}$$

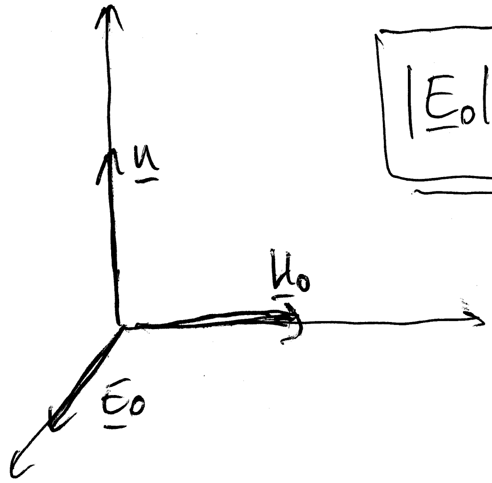
$$\text{div}\,\underline{E}_\omega = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{n}\underline{E}_0 = 0}$$

} $\underline{E}, \underline{H}$ a terjedési irányra merőleges síkban van.

$$i\omega\mu \underline{H}_0 e^{ik\underline{n}\underline{x}} = ik\,\underline{n}\times\underline{E}_0 e^{ik\underline{n}\underline{x}}$$ (rot $\underline{E}$-be leírva)

$$v_f \underbrace{\mu \underline{H}_0}_{\underline{B}_0} = \underline{n}\times\underline{E}_0 \Rightarrow \boxed{\underline{E}_0 \perp \underline{H}_0 \perp \underline{n} \perp \underline{E}_0}$$

$$\boxed{|\underline{E}_0| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,|\underline{H}_0|}$$



Ha ε képzetes résszel is rendelkezik:

→ bontsuk fel a mennyiségeket valós és képzetes részekre:

legyen:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i\varepsilon''$$

$$\underline{k} = \underline{n}(k' + ik'')$$

} diszperziós relációba leírva:

$$k'^2 + 2ik'k'' - k''^2 = \mu\omega^2(\varepsilon' + i\varepsilon'')$$

↳ valós és képzetes részekre külön-külön is teljesül:

szétbontva:

$$\left.\begin{aligned}\xi'^2 - \xi''^2 &= \mu\omega^2\varepsilon' \\ 2\xi'\xi'' &= \mu\omega^2\varepsilon''\end{aligned}\right\} \rightarrow \xi''$$

egymásba írva kapjuk:

$$(\xi'^2)^2 - \mu\omega^2\varepsilon'\xi'^2 - \frac{1}{4}\mu^2\omega^4\varepsilon''^2 = 0$$

megoldva:

$$\boxed{\xi'^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2\varepsilon'\left[1+\left(1+\frac{\varepsilon''^2}{\varepsilon'^2}\right)^{1/2}\right]}$$

ezzel az exp. tagok: $e^{i(\xi'+i\xi'')\underline{n}\underline{x}-i\omega t} \sim e^{i\varphi(\xi')-\xi''\underline{n}\underline{x}}$, ahol

$\boxed{\varphi(\xi') = \xi'\underline{n}\underline{x} - \omega t}$ fázis, így:

$v_f = \frac{\omega}{\xi'}$-et helyettesítve kapjuk: ($2\xi'\xi''$-egyenletből)

$\boxed{\xi'' = \frac{1}{2}\mu\varepsilon''\omega v_f}$ → térerősség exp cseng le.

→ karakterisztikus távolság: $\frac{1}{2\delta}$

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\mu\omega v_f\varepsilon''}}$$

→ lineáris közeg esetében: $\underline{\varepsilon'' = \varepsilon_0\chi_e''}$ → ε' ettől nem független

→ kauzalitási kapcsolat

→ láttuk, hogy $\underline{n}\underline{E}_0 = \underline{n}\underline{H}_0 = 0$

→ írjuk be a kapott ξ-t a ~~[illegible]~~ rot E_ω-s egyenletbe:

$i\omega\mu\underline{H}_0 = i(\xi'+i\xi'')\underline{n}\times\underline{E}_0$ $\quad \frac{\omega}{\xi'} = v_f \quad$ ($\underline{n}\times\underline{E}_0 = v_f\underline{B}_0$), H_0-t kifejezve:

$$\boxed{\underline{H}_0 = \frac{1}{\mu v_f}\left(1+i\frac{\xi''}{\xi'}\right)\underline{E}_0 = \frac{1}{\mu v_f}\left(1+i\frac{\mu\varepsilon'' v_f^2}{2}\right)\underline{E}_0}$$

Ha nem → rezonancia közelében ez egy fázistolást jelent:

$$\boxed{\underline{H}_0 \approx \frac{1}{v_f\mu}e^{i\frac{\mu\varepsilon'' v_f^2}{2}}\underline{E}_0}$$

→ Teljesítmény, átlagos energia-sűrűség:

rezonanciától távol

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{S}_\omega &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\underline{E}_\omega \times \underline{H}_\omega^* = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2}(\underline{E}_0\underline{H}_0^*)\,\underline{n}\,e^{-2k''\underline{n}\underline{x}} \approx \\ \underline{S}_\omega &\approx \frac{1}{2\mu v_f} E_0^2 \cos\frac{\mu\varepsilon'' v_f^2}{2}\,\underline{n}\,e^{-\mu\omega v_f \varepsilon''\underline{n}\underline{x}}\end{aligned}}$$

→ Disszipált energia Joule-hő alakul

→ Átlagos energiasűrűség

$$\boxed{\rho_{E_\omega} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2}\left[\underline{E}_\omega \underline{D}_\omega^* + \underline{B}_\omega \underline{H}_\omega^*\right] = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left[\varepsilon(\omega)|\underline{E}_0|^2 + \mu|\underline{H}_0|^2\right] e^{-2k''\underline{n}\underline{x}}}$$

→ Energia terjedési sebessége: használjuk, hogy $\boxed{\varepsilon' = \frac{1}{\mu v_f}}$, ezzel:

dE^T $|S_\omega|v_f$

$$|\underline{v}_E| = \frac{|\partial E_\omega|}{\rho_{E_\omega}} = \frac{\frac{\varepsilon' v_f}{\cancel{2}}\cancel{E_0^2}\cos\frac{\mu\varepsilon'' v_f^2}{2}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\varepsilon'}\cancel{E_0^2}} = \boxed{v_f \cos\frac{\mu\varepsilon'' v_f^2}{2} = v_E} \leq v_f$$

Láttuk, hogy: $\omega = v_f k' = \frac{c}{n}k'$, ahol $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$, ezzel

$\boxed{n = c\sqrt{\mu\varepsilon'}}$ a törésmutató, és $v_f = \frac{c}{n}$

$n(k')$

→ Csoportsebesség: $v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{c}{n} - ck'\frac{1}{n^2}\frac{dn}{dk'} = \frac{c}{n} - ck'\frac{1}{n^2}\frac{dn}{d\omega}\frac{d\omega}{dk'}$, így

$$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk'} = v_f\frac{1}{1 + \frac{ck'}{n^2}\frac{dn}{d\omega}}}$$

Amennyiben $\frac{dn}{d\omega} < 0$, akkor $v_f < v_g$.

Tudjuk, hogy $\varepsilon = (\varepsilon' + i\varepsilon'') = \varepsilon_0(1+\chi_e)$, innen

$$\boxed{\varepsilon' = \mathrm{Re}\,\varepsilon = \varepsilon_0(1+\mathrm{Re}\,\chi_e)}$$

, ezzel $\frac{dn}{d\omega}$ átalakítható, mivel $n = c\sqrt{\varepsilon'\mu}$

$$\boxed{dn = \frac{c\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\varepsilon'}}d\varepsilon'}$$

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{c\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\varepsilon'}} \cdot \frac{d\varepsilon'}{d\omega} = \frac{n}{2\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{d\omega} = \frac{n}{2\varepsilon'}\varepsilon_0\frac{d\,\mathrm{Re}\,\chi_e}{d\omega}$$

Drude-modellt véve:

$$\boxed{\mathrm{Re}\,\chi_e = \frac{Ne^2}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

, ahol γ a csillapítási paraméter

csill. harm. oszc. modell

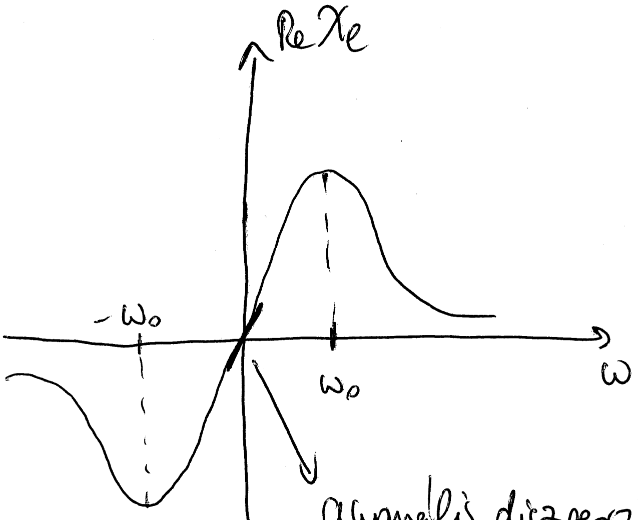
→ cplx pólus jelenik meg.

Vizsgálat rezonancia közelében:

$$\boxed{\mathrm{Re}\,\chi_e \simeq \frac{Ne^2}{m} \cdot \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\gamma^2\omega_0^2}}$$

, ezt visszahelyettesítve:

$$\boxed{\frac{dn}{d\omega} = -\frac{n}{2\varepsilon'}\varepsilon_0\frac{Ne^2}{m}\frac{2\omega}{\gamma^2\omega_0^2}}$$



anomális diszperzió

$v_g > v_f$.

„hullám előbb jelenik meg, minthogy belépne” → csoport maxhelye a vonulat elejéhez felzárkózik.

↓

torzulás.

→ Véges vezetőképességű anyag:

$$\mathrm{rot}\,\underline{H}_\omega = -i\omega\varepsilon(\omega)\left(1+i\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)\underline{E}_\omega$$

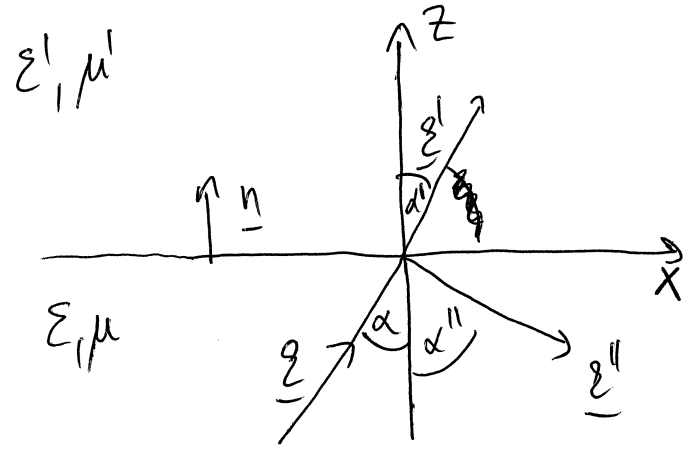
effektív dielektromosság:

$$\boxed{\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}, \quad \tilde{\varepsilon}' = \varepsilon, \quad \tilde{\varepsilon}'' = \frac{\sigma}{\omega}}$$

Ezzel: $$\varepsilon' = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\frac{1+\left(1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}\right)^{1/2}}{2}\right]^{1/2}$$

$\varepsilon'' = \mu\sigma v_f \frac{1}{2}$, kölli mostat lásd fentebb → ugyanaz

→ **Hullámok törése és visszaverődése:** Vegyük az alábbi esetet:



Hullámok:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{E}(z>0) &= \underline{E}_0' e^{i(\underline{k}'\underline{x}-\omega' t)} \\ \underline{E}(z<0) &= \underline{E}_0 e^{i(\underline{k}\underline{x}-\omega t)} + \underline{E}_0'' e^{i(\underline{k}''\underline{x}-\omega'' t)} \end{aligned}}$$

Itt: $k' = \frac{\omega'}{v_f'}$, $k = \frac{\omega}{v_f}$, $k'' = \frac{\omega''}{v_f}$, $v_f' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'\mu'}}$, $v_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

→ Határfeltételek: $\underline{E}_t = \underline{n} \times \underline{E}$ folytonosan megy át

$\underline{H}_t = \underline{n} \times \underline{H}$ folytonosan megy át

Vizsgáljuk az $\underline{x} = \underline{0}$ esetet:

$( )\, e^{-i\omega' t} = ( )\, e^{-i\omega t} + ( )\, e^{-i\omega'' t}$, ez csak akkor teljesül, ha a fázisok egyeznek:

$\boxed{\omega = \omega' = \omega''} \Rightarrow \boxed{k = k''}$, ezen kívül síkban mozogva a fázis nem változik: $\boxed{k_{\parallel}\underline{x} = k'_{\parallel}\underline{x} = k''_{\parallel}\underline{x}}$

→ kifejezhető a beesési és visszaverődési szögekkel:

$k \sin\alpha\, |\underline{x}| = k' \sin\alpha' |\underline{x}| = k'' \sin\alpha'' |\underline{x}|$, mivel $k = k''$, így

$\boxed{\sin\alpha = \sin\alpha''} \rightarrow \boxed{\alpha = \alpha''}$ Visszaverődési-törvény

→ Ezen kívül:

$$\boxed{\frac{n}{n'} = \frac{\xi}{\xi'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha} = \frac{v_f'}{v_f}}$$

Snellius-Descartes-törvény

$\underline{E}_t$ folytonos: $\underline{n}\times(\underline{E}_0+\underline{E}_0'') = \underline{n}\times\underline{E}_0'$

$\underline{H}_t$ folytonos: $\underline{n}\times(\underline{H}_0+\underline{H}_0'') = \underline{n}\times\underline{H}_0'$

Korábban láttuk, hogy: ~~[illegible]~~ $\hat{\xi}\times \underline{E}_0 = v_f \underline{B}_0 = \mu v_f \underline{H}_0$, ebből adódóan ~~[illegible]~~

⇒ Fresnel-formulák: $(\underline{n},\hat{\xi})$ a beesési sík

→ A-eset: $\underline{n}\underline{E}_0 = 0 = \hat{\xi}\underline{E}_0 \Rightarrow \boxed{\underline{E}_0 \perp (\underline{n},\hat{\xi})}$

→ B-eset: $\underline{n}\underline{H}_0 = 0 = \hat{\xi}\underline{H}_0 \Rightarrow \boxed{\underline{E}_0 \subset (\underline{n},\hat{\xi})}$

linearitás miatt külön tárgyalható

→ A-eset vizsgálata: $\boxed{\underline{E}_0+\underline{E}_0''=\underline{E}_0'}$

Írjuk be: H_t: a folytonosságba

$$\frac{1}{\mu v_f}\underline{n}\times\left[\hat{\xi}\times\underline{E}_0 + \hat{\xi}''\times\underline{E}_0''\right] = \frac{1}{\mu' v_f'}\underline{n}\times\left[\hat{\xi}'\times\underline{E}_0'\right]$$

Ismert, hogy: $\underline{n}\times(\hat{\xi}\times\underline{E}_0) = \hat{\xi}(\underline{E}_0\underline{n}) - \underline{E}_0(\hat{\xi}\underline{n})$, ezzel és, hogy $\underline{n}\underline{E}_0^{',''}=0$

$$-\frac{1}{\mu v_f}\left[(\underline{n}\hat{\xi})\underline{E}_0 + (\underline{n}\hat{\xi}'')\underline{E}_0''\right] = -\frac{1}{\mu' v_f'}(\underline{n}\hat{\xi}')\underline{E}_0' = -\frac{1}{\mu' v_f'}(\underline{n}\hat{\xi}')\left[\underline{E}_0+\underline{E}_0''\right]$$

a skalárszorzatok a szöggel kifejezhetők:

$$\boxed{\underline{n}\hat{\xi} = \cos\alpha \quad , \quad \underline{n}\hat{\xi}'' = -\cos\alpha \quad , \quad \underline{n}\hat{\xi}' = \cos\alpha'}$$

→ visszaírva:

$$\boxed{\underline{E}_0'' = \frac{\cos\alpha - \frac{\mu v_f}{\mu' v_f'}\cos\alpha'}{\cos\alpha + \frac{\mu v_f}{\mu' v_f'}\cos\alpha'}\underline{E}_0} \quad \text{és} \quad \boxed{\underline{E}_0' = \frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha + \frac{v_f\mu}{v_f'\mu'}\cos\alpha'}\underline{E}_0}$$

→ B-eset vizsgálata: $\boxed{\underline{H}_0' = \underline{H}_0 + \underline{H}_0''}$

$\hat{\underline{\xi}} \times (\hat{\underline{\xi}} \times \underline{E}_0)$ -t vizsgálom, mivel $\hat{\underline{\xi}} \times \underline{E}_0 = \mu v_f \underline{H}_0$, balról $\hat{\underline{\xi}} \times$ -el szorozva:

$$\boxed{\underline{E}_0 = -\mu v_f (\hat{\underline{\xi}} \times \underline{H}_0)}$$

Ezzel a problémát az előző esetre vezettük vissza: $\underline{E}_t$:

$$-\mu v_f \underline{n} \times (\hat{\underline{\xi}} \times \underline{H}_0 + \hat{\underline{\xi}}'' \times \underline{H}_0) = -\mu' v_f' \underline{n} \times (\hat{\underline{\xi}}' \times \underline{H}_0')$$

Megoldva:

$$\boxed{\underline{H}_0'' = \frac{\mu v_f \cos\alpha - \mu' v_f' \cos\alpha'}{\mu v_f \cos\alpha + \mu' v_f' \cos\alpha'} \cdot \underline{H}_0} \quad \text{és} \quad \boxed{\underline{H}_0' = \frac{2\mu v_f \cos\alpha}{\mu v_f \cos\alpha + \mu' v_f' \cos\alpha'} \underline{H}_0}$$

→ B-eset speciális alesete: Brewster-szög:

→ ∅ visszavert hullám:

$$\underline{H}_0'' = \underline{0} \Leftrightarrow \mu v_f \cos\alpha = \mu' v_f' \cos\alpha'$$

→ legtöbb optikai anyag esetén $\mu \approx 1$, így $\mu \approx \mu' \approx 1$ ezzel:

$$\boxed{\frac{1}{n}\cos\alpha = \frac{1}{n'}\cos\alpha'}$$

átrendezve és trig. azon. miatt:

$$\frac{n'}{n}\cos\alpha = \sqrt{1 - \text{[redacted]} \sin^2\alpha'} \overset{S-D}{=} \sqrt{1 - \frac{n^2}{n'^2}\sin^2\alpha}$$

→ átírással

[redacted]

→ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

$$\frac{n'^2}{n^2}\cos^2\alpha = 1 - \frac{n^2}{n'^2}\sin^2\alpha$$

[redacted]

$$\left(\frac{n'^2}{n^2} - 1\right)\cos^2\alpha = \sin^2\alpha \left(1 - \frac{n^2}{n'^2}\right)$$

[redacted] kiemelve

→ Két oldalt átosztva:

$tg^2\alpha = \frac{n'^2}{n^2}$ jelölje a Brewster-szöget α_{Br}

$$tg\,\alpha_{Br} = \frac{n'}{n} = \frac{\sin\alpha_{Br}}{\cos\alpha_{Br}}$$

$\frac{\sin\alpha_{Br}}{\cos\alpha'_{Br}} = \frac{n'}{n}$ kezdeti megállapítás miatt: $\frac{n'}{n}\cos\alpha_{Br} = \cos\alpha'_{Br}$

$\sin\alpha_{Br} = \cos\alpha'_{Br} \rightarrow \boxed{\alpha_{Br} + \alpha'_{Br} = \frac{\pi}{2}}$ ↗ Tisztán poláros fény verődik vissza.

→ A-esetén miért nincs ilyen?

$$E''_0 = 0 \longleftrightarrow \frac{1}{n'}\cos\alpha = \frac{1}{n}\cos\alpha'$$

$\frac{n^2}{n'^2}\cos^2\alpha = 1 - \frac{n^2}{n'^2}\sin^2\alpha$ $\xrightarrow{\text{kiesik a szög}}$ $\boxed{\frac{n^2}{n'^2} = 1}$

azonosság

→ ∅ új közeg

Emiatt

→ Brewster-szög használható polarizációk elkülönítésére.

⇒ Teljes visszaverődés: $\sin\alpha' = 1$

→ Határszög: $\boxed{n\sin\alpha_h = n'}$

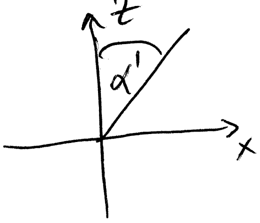
csak $n' < n$ esetén van, optikailag ritkább közegből jön a hullám

Ha $\alpha > \alpha_h$, akkor:

$\cos\alpha' = \sqrt{1 - \frac{n^2}{n'^2}\sin^2\alpha} = i\sqrt{\frac{n^2}{n'^2}\sin^2\alpha - 1}$ → tisztán képzetessé válik az átmenő.

→ evanescens megoldás:

$$e^{i\underline{k}'\underline{x}} = e^{ik'_z z + ik'_{\parallel} x} = e^{ik' z\cos\alpha + \dots} = \underbrace{e^{-k' z\sqrt{\frac{n^2}{n'^2}\sin^2\alpha - 1}}}_{\text{lecsengő tag}} + \dots$$



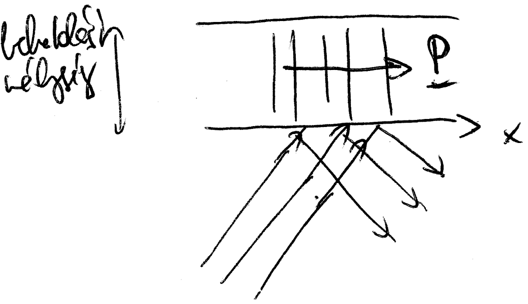
→ véges behatolási mélység

$$\mathrm{Re}\,\underline{n}\,\underline{S}' = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\underline{n}(\underline{E}'\times\underline{H}'^{*}) = \frac{1}{2\omega_g'}\mathrm{Re}\,\underline{n}\left(\underline{E}'\times(\underline{k}'\times\underline{E}')\right)^{*} =$$

$$\boxed{\mathrm{Re}\,\underline{n}\,\underline{S}' = \frac{1}{2\omega_g}\mathrm{Re}(\underline{n}\,\underline{k}^{*})\,|\underline{E}'|^2 = 0}$$

, mivel $\mathrm{Re}\{\underline{k}', \underline{k}'^{*}\} = 0$

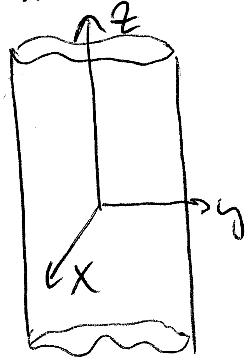
→ teljesítmény nem jut át → **bekanyarodik**



8. Tétel: Véges kiterjedésű EM hullámok: Hullámvezető:

→ Tetszőleges, konstans keresztmetszetű lap, eltolva (z-ben).

→ Vegyünk ideális vezetőt.



→ határfelületen eltűnik a tangenciális komponens.

$$\boxed{\underline{E}(\underline{x},t) = \underline{E}(x,y)\, e^{ik_z z - i\omega t}} \quad , \quad v_f = \frac{\omega}{k_z}$$

→ z-ben periodikus , jel: $k_z \to k$

→ Longitudinális és transzverzális komponensre bontjuk fel:

$$\boxed{\underline{E}(\underline{x},t) = \left(\underline{E}_t(x,y) + \underline{e}_z E_l(x,y)\right) e^{ikz - i\omega t}}$$

~~gradot~~ → ∇-t is felbontjuk: $\underline{\nabla} = \underline{e}_z \overset{\cdot(ik)}{\partial_z} + \underline{\nabla}_t$

→ Így: $\mathrm{rot}\,\underline{E} = (\underline{e}_z \partial_z + \underline{\nabla}_t) \times (\underline{E}_t + \underline{e}_z E_l) = (ik\, \underline{e}_z \times \underline{E}_t + \overset{\underline{e}_z \times \underline{e}_z}{\underline{0}} + \underline{\nabla}_t \times \underline{E}_t \overset{\text{csere}}{-} \underline{e}_z \times \underline{\nabla}_t E_l) \cdot e^{ikz}$

(időfüggéstől eltekintünk el)

komponensekre bontva:

$$\boxed{(\mathrm{rot}\,\underline{E})_l = (\underline{\nabla}_t \times \underline{E}_t)\, e^{ikz}\, \underline{e}_z} \quad \text{longitudinális}$$

$$\boxed{(\mathrm{rot}\,\underline{E})_t = \underline{e}_z \times (ik\, \underline{E}_t - \underline{\nabla}_t E_l)\, e^{ikz}} \quad \text{transzverzális}$$

Így a Maxwell-egyenletek:

$$i\omega \underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{E} \Rightarrow \begin{cases} i\omega B_l = (\underline{\nabla}_t \times \underline{E}_t)\, \underline{e}_z \\ i\omega \underline{B}_t = \underline{e}_z \times (ik\, \underline{E}_t - \underline{\nabla}_t E_l) \end{cases}$$

$$-i\omega \varepsilon\mu \underline{E} = \mathrm{rot}\,\underline{B} \Rightarrow \begin{cases} -i\omega \varepsilon\mu E_l = (\underline{\nabla}_t \times \underline{B}_t)\, \underline{e}_z \\ -i\omega \varepsilon\mu \underline{E}_t = \underline{e}_z \times (ik\, \underline{B}_t - \underline{\nabla}_t B_l) \end{cases}$$

→ vektoriális szorzatot felbontjuk, úgy hogy $\underline{e}_z\times$ -el balról beszorozzuk:
ezt jobboldali

(1) $i\omega B_\ell = \underline{e}_z(\underline{\nabla}_t\times\underline{E}_t)$

(2) $i\omega(\underline{e}_z\times\underline{B}_t) = -i\xi\,\underline{E}_t+\underline{\nabla}_t E_\ell$

(3) $-i\omega\varepsilon\mu E_\ell = \underline{e}_z(\underline{\nabla}_t\times\underline{B}_t)$

(4) $-i\omega\varepsilon\mu(\underline{e}_z\times\underline{E}_t) = -i\xi\,\underline{B}_t+\underline{\nabla}_t B_\ell$

(2) ezt $\cdot(i\xi)$ és a (4)-ből $(-i\xi\underline{B}_t)$-t kifejezve leírjuk

↓

$$\xi^2\underline{E}_t+i\xi\underline{\nabla}_tE_\ell=+i\omega\underline{e}_z\times\left[+i\omega\varepsilon\mu(\underline{e}_z\times\underline{E}_t)+\underline{\nabla}_tB_\ell\right]$$

$$\underline{e}_z\times(\underline{e}_z\times\underline{E}_t)=\underbrace{\underline{e}_z(\underline{e}_z\underline{E}_t)}_{0}-\underline{E}_t\underbrace{\underline{e}_z^2}_{1}$$, ezzel:

$$\xi^2\underline{E}_t+i\xi\underline{\nabla}_tE_\ell=\omega^2\varepsilon\mu\underline{E}_t+i\omega\underline{e}_z\times\underline{\nabla}_tB_\ell$$

átrendezve: $$\underline{E}_t(\varepsilon\mu\omega^2-\xi^2)=i\xi\underline{\nabla}_tE_\ell-i\omega\underline{e}_z\times\underline{\nabla}_tB_\ell$$

Legyen $\gamma^2=\varepsilon\mu\omega^2-\xi^2$, így

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{E}_t&=\frac{1}{\gamma^2}\left[i\xi\underline{\nabla}_tE_\ell-i\omega\underline{e}_z\times\underline{\nabla}_tB_\ell\right],\\ \underline{B}_t&=\frac{1}{\gamma^2}\left[i\xi\underline{\nabla}_tB_\ell+i\varepsilon\mu\omega\,\underline{e}_z\times\underline{\nabla}_tE_\ell\right]\end{aligned}}$$ hasonlóan

Mivel: $(\Delta+\varepsilon\mu\omega^2)\begin{pmatrix}\underline{E}\\ \underline{B}\end{pmatrix}=0$ (ezt korábban láttuk), így

$$\boxed{(\Delta_t+\gamma^2)\begin{pmatrix}E_\ell(x,y)\\ B_\ell(x,y)\end{pmatrix}=0}$$

→ két módus: +1 spec

TM: $B_\ell=0,\ E_\ell\neq0,\ E_\ell\big|_S=0$

TE: $B_\ell\neq0,\ E_\ell=0,\ \frac{\partial B_\ell}{\partial n}\Big|_S=0$

TEM: $E_\ell=B_\ell=0$

transzverz
mágneses
elektromos
elektromágneses

Legyen $\Psi(x,y)$ azt a mennyiség, amelyik nem zérus.

Így a két egyenlet egy alakúra hozható:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi(x,y)=-\gamma^2\Psi(x,y)$$

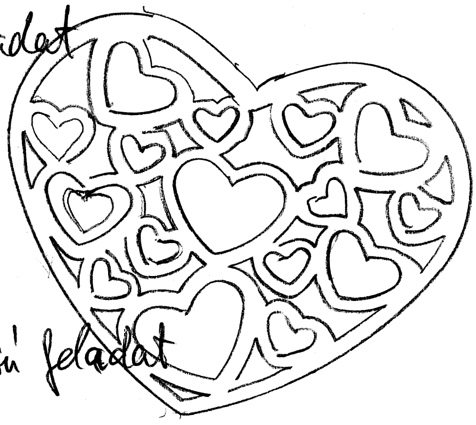
→ ami egy sajátérték probléma

→ Határfeltétel választja ki a megoldásokat → ezt a geometria adja meg.

Így a két fontos módus:

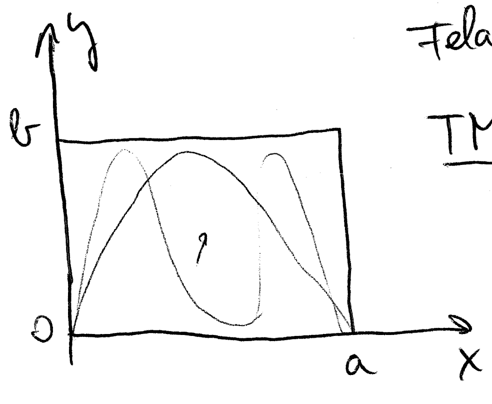
$$\text{TM:}\quad \left.\begin{aligned}&\Psi(x,y)=E_\ell(x,y)\\&\Psi(x,y)\big|_{\underline{x}_T}=0\end{aligned}\right\}\ \text{Dirichlet-típ. feladat}$$

$$\text{TE:}\quad \left.\begin{aligned}&\underline{E}_t\sim\underline{e}_z\times\underline{\nabla}_t B_\ell\\&\Psi(x,y)=B_\ell(x,y)\\&\frac{\partial\Psi}{\partial n}\bigg|_{\underline{x}_T}=0\end{aligned}\right\}\ \text{Neumann-típusú feladat}$$



$$\underline{t}\,\underline{E}_t\big|_{\underline{x}_T}=0\sim\underline{\nabla}_t B_\ell(\underline{t}\times\underline{e}_z)=\underline{n}\underline{\nabla}_t B_\ell\ ,\quad \text{ahol}\ \underline{t}=\underline{n}\times\underline{e}_z$$

→ Téglalap keresztmetszetű vezető:



Feladat: $\Delta_t\Psi=-\gamma^2\Psi$

TM-módus: Peremfeltételek:

$\hookrightarrow \Psi|_{\underline{x}_T}=0,\quad \Psi=E_\ell$

$\hookrightarrow \Psi(x,0)=\Psi(x,b)=$
$=\Psi(0,y)=\Psi(a,y)=0$

Megoldást szorzat alakban keressük:

$$\boxed{\Psi(x,y)=A_{n_{\cancel{x}}n_y}\sin\left(\frac{\pi n_x x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi n_y y}{b}\right)}$$

→ beírva megkapjuk γ sajátértékeket:

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\pi n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_y}{b}\right)^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - k^2 \quad \frac{1}{\varepsilon\mu}$$

→ diszperziós reláció: $\boxed{\omega^2 = c^2\left[\pi^2\left(\left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2\right) + k^2\right]}$

ahol $n_x, n_y \in \mathbb{N}^+$, Itt $\omega > \varkappa$, $v_f > c$.

→ TE-módus: $\Psi = B_\ell$, Pf: $\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=0,a} = 0$, $\left.\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right|_{y=0,b} = 0$

Megoldás: $\boxed{\Psi(x,y) = B_{n_x n_y} \cos\left(\frac{\pi n_x x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n_y y}{b}\right)}$

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\pi}{a} n_x\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} n_y\right)^2$$

→ konstans módus nem lehet → $n_x = n_y = 0$ nincs, egyébként $n_x, n_y \in \mathbb{N}$

→ legkisebb frekvencia (TE-ből):

$$\boxed{\omega_{min}^2 = c^2\left[k^2 + \pi^2 \frac{1}{(\min\{a,b\})^2}\right]}$$ alulvágó

→ csoportsebesség: $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, $\omega = c\sqrt{\pi^2\left(\left(\frac{n_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{b}\right)^2\right) + k^2}$, így

$$v_g = c\frac{k}{\sqrt{\dots}} = c^2 \frac{k}{\underbrace{c\sqrt{\dots}}_{\omega}} = c^2 \underbrace{\frac{k}{\omega}}_{\frac{1}{v_f}} = \boxed{c^2 \frac{1}{v_f} = v_g}$$

$$\boxed{c^2 = v_f v_g}$$

→ transzverzális komponensek:

TM: $\Psi = E_\ell \,,\ \Psi|_{\underline{x}_F} = 0$

Pl: $E_x = \frac{ik}{\kappa^2}\frac{\pi}{a} n_x E_0 \cos\left(\frac{\pi n_x x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi n_y y}{b}\right)$

B-vel pont ellentettet kell deriválni

$$\begin{cases} \underline{E}_t = \frac{1}{\kappa^2} ik \underline{\nabla}_t \Psi \\ \underline{B}_t = \frac{1}{\kappa^2} i\varepsilon\mu\omega\, \underline{e}_z \times \underline{\nabla}_t\Psi = \frac{\varepsilon\mu\omega}{k}\underline{e}_z \times \underline{E}_t \end{cases}$$

TE: $\Psi = B_\ell \,,\ \frac{\partial\Psi}{\partial n}\Big|_{\underline{x}_F} = 0$

$$\begin{cases} \underline{B}_t = \frac{1}{\kappa^2} ik\, \underline{\nabla}_t \Psi \\ \underline{E}_t = -\frac{\omega}{k}\underline{e}_z \times \underline{B}_t = -\frac{1}{\kappa^2} i\omega\, \underline{e}_z \times \underline{\nabla}_t\Psi \end{cases}$$

→ Energiaterjedés sebessége, átlagos energiaáram-sűrűség:

$$v_E = \frac{\int_F dx\,dy\, \overline{S}_z^T}{\int_F dx\,dy\, \overline{u}^T}$$

← hosszegységre jutó átlagos energiasűrűség

keresztmetszetre integrált E-sűrűség

$\overline{S}_z^T = \frac{1}{2}\underline{e}_z(\underline{E}_t \times \underline{H}_t^*)$

$S \sim \overline{u}^T = \frac{1}{4}\left(\varepsilon|\underline{E}|^2 + \frac{1}{\mu}|\underline{B}|^2\right)$

Feltesszük, hogy $\varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$, így:

$i(-i) = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{TM: } \overline{S}_z^T = \frac{1}{2\cancel{\mu}}\underline{e}_z\left[\underline{E}_t \varepsilon\cancel{\mu}\frac{\omega}{k}\times(\underline{e}_z \times \underline{E}_t^*)\right] \overset{\underline{e}_z\underline{E}_t = 0}{=} \frac{\varepsilon\omega}{2k}|\overset{\underline{E}_t\underline{E}_t^*}{\underline{E}_t}|^2 = \frac{\varepsilon\omega}{2\cancel{k}}\frac{k^{\cancel{2}}}{\kappa^4}\underline{\nabla}_t\Psi\, \underline{\nabla}_t\Psi^* \\ &\text{TE: } \overline{S}_z^T = \frac{1}{2\mu}\left(-\frac{\omega}{k}\right)\underline{e}_z \cancel{\times}\left[(\underline{e}_z \times \underline{B}_t)\times \underline{B}_t^*\right] \overset{\underline{e}_z\underline{B}_t^* = 0}{=} \frac{\omega}{2\mu k}|\underline{B}_t|^2 = \frac{\omega k}{\cancel{k}2\mu}\frac{1}{\kappa^4}\underline{\nabla}_t\Psi\, \underline{\nabla}_t\Psi^* \end{aligned}}$$

→ Integrálás keresztmetszetre:

TM: $\iint dx\,dy\, \overline{S}_z^T(TM) = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\omega k}{\kappa^4}\iint dx\,dy\, \underbrace{\underline{\nabla}_t\Psi\, \underline{\nabla}_t\Psi^*}$

teljes divé átírás

$\underline{\nabla}_t(\Psi\underline{\nabla}_t\Psi^*) - \Psi\Delta_t\Psi^*$

$\underline{\nabla}_t(\Psi\underline{\nabla}_t\Psi^*) + \kappa^2|\Psi|^2$

Ezen kívül alkalmazzuk a 2D-s Gauss-tételt is:

$$\int_F \mathrm{div}_t \underline{B} = \int_C dl\, \underline{B}\, \underline{n} \quad , \text{ ezzel}$$

$$\iint dx\,dy\, \overline{S}_z^T(TM) = \frac{\varepsilon \cancel{\mu} \omega \beta}{2\gamma^4}\left[\underbrace{\int_C dl\, \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n}}_{\text{0 mindkét módus esetén!}} + \gamma^2 \iint dx\,dy\, |\Psi|^2\right] =$$

vagy egyik vagy másik 0.

$$= \boxed{\frac{\varepsilon\omega\beta}{2\gamma^2}\iint dx\,dy\,|\Psi|^2 = \iint dx\,dy\, \overline{S}_z^T(TM)} = S$$

$$\text{TE:} \quad \boxed{\iint dx\,dy\, \overline{S}_z^T(TE) = \boxed{\frac{\omega\beta}{2\mu\gamma^2}\iint dx\,dy\, |\Psi|^2}}$$

U-t hasonlóan:

$$\text{TM:} \iint dx\,dy\, \overline{U}^T(TM) = \frac{1}{4}\iint dx\,dy\left[\varepsilon|\Psi|^2 + \varepsilon\frac{1}{\gamma^4}\beta^2|\underline{\nabla}_t\Psi|^2 + \frac{\varepsilon^2\mu^2\omega^2}{\mu\gamma^4}|\nabla_t\Psi|^2\right]$$

Felhasználjuk, hogy: $\underline{\iint dx\,dy\,|\underline{\nabla}_t\Psi|^2 = \gamma^2\iint dx\,dy\,|\Psi|^2}$, így:

$$\iint dx\,dy\,\overline{U}^T(TM) = \frac{\varepsilon}{4}\iint dx\,dy\,|\Psi|^2\left(1 + \frac{\beta^2 + \varepsilon\mu\omega^2}{\gamma^2}\right)$$

Használjuk, hogy $\varepsilon\mu\omega^2 - \beta^2 = \gamma^2$:

$$U = \boxed{\iint dx\,dy\,\overline{U}^T(TM) = \frac{\cancel{4}\varepsilon^2\mu\omega^2}{2\cancel{4}\gamma^2}\iint dx\,dy\,|\Psi|^2}$$

TE-re ugyanúgy elvégezhető, ~~[illegible]~~

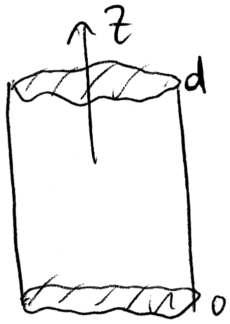
Ezzel:

$$\boxed{v_E = \frac{S}{U} = \frac{\cancel{\varepsilon}\omega\beta}{\varepsilon^{\cancel{2}}\mu\omega^{\cancel{2}}} = c^2\frac{\beta}{\omega} = \frac{c^2}{v_f} = v_g}$$

Ez mindkét módusra azonos!!
→ transzport sebesség.

→ üregrezonátor: → még két peremfeltétel: → cső lezárása $\sigma=\infty$ vezetővel

$z=0,d$ -ben is tűnjön el a hullám.



TM: $\underline{E}_t(z=0, x,y) = \underline{E}_t(z=d, x,y) = 0$

$$\underline{E}_t \sim \sin\left(\frac{\pi n_z z}{d}\right)$$

$$\underline{E}_t = \frac{1}{\gamma^2}\underline{\nabla}_t \partial_z E_\ell$$ → Ψ-cos-os

Téglalap esetén:

$$\boxed{\Psi(TM) = A(\underset{\downarrow \atop (n_x, n_y, n_z)}{\underline{n}}) \cos\left(\frac{n_z\pi z}{d}\right)\sin\left(\frac{n_x\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{b}\right)}$$

$$\omega_{\underline{n}}^2 = c^2\pi^2\left[\left(\frac{n_z}{d}\right)^2+\left(\frac{n_x}{a}\right)^2+\left(\frac{n_y}{b}\right)^2\right]$$

$n_z=0,1,\dots$

$n_x,n_y=1,2,\dots$

TE esetén z-ben sin-es

$$\boxed{\Psi(TE) = A(\underline{n})\sin\left(\frac{\pi n_z z}{d}\right)\cos\left(\frac{\pi n_x x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi n_y y}{b}\right)}$$

$n_z = 1,2,\dots$

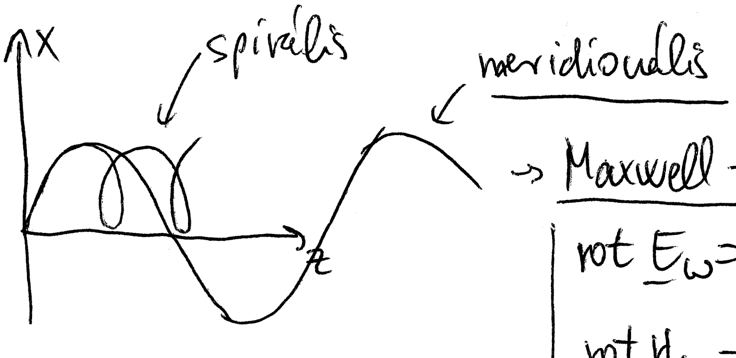
$n_y, n_x = 0,1,\dots$

diszp rel:

$$\boxed{\varepsilon\mu\omega = \pi^2\left(\frac{n_z^2}{d^2}+\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}\right)}$$

→ Fényvezető: (nincs a tételsorban)

$n(\underline{x}) = \sqrt{\varepsilon_r(\underline{x})}$



→ Maxwell-egyenletek:

$\text{rot}\,\underline{E}_\omega = i\omega\mu \underline{H}_\omega$	$\text{div}\,\underline{D}_\omega = 0 = \text{div}(\varepsilon(x)\underline{E}_\omega)$
$\text{rot}\,\underline{H}_\omega = -i\omega\,\varepsilon(x)\,\underline{E}_\omega$	$\text{div}\,\underline{H}_\omega = 0$

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\underline{H}_\omega = -\Delta \underline{H}_\omega = -i\omega\,\text{rot}\left(\varepsilon(\underline{x})\underline{E}_\omega\right) = -i\omega\,\varepsilon(\underline{x})\,\text{rot}\,\underline{E}_\omega - i\omega\,\underline{\nabla}\varepsilon\times\underline{E}_\omega =$$

$$= \varepsilon(\underline{x})\mu\omega^2 \underline{H}_\omega - i\omega\,\underline{\nabla}\varepsilon\times\underline{E}_\omega \to \boxed{\left(\Delta+\varepsilon(\underline{x})\mu\omega^2\right)\underline{H}_\omega = i\omega\,\underline{\nabla}\varepsilon\times\underline{E}_\omega}$$

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\underline{E}_\omega = i\omega\mu\,\text{rot}\,\underline{H}_\omega = \varepsilon\mu\omega^2\underline{E}_\omega$$

$$0 = \text{div}\,\underline{D}_\omega = \underline{\nabla}\varepsilon\cdot\underline{E}_\omega + \varepsilon\,\underline{\nabla}\underline{E}_\omega$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\nabla}\underline{E}_\omega = -\frac{1}{\varepsilon}\underline{\nabla}\varepsilon\cdot\underline{E}_\omega$$

$$\Delta\underline{E}_\omega + \varepsilon(\underline{x})\mu\omega^2\underline{E}_\omega = \text{grad}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\underline{\nabla}\varepsilon\,\underline{E}_\omega\right)$$

$= \text{grad div}\,E_\omega$

↳ lassan változó törésmutató esetén:

$$\left|\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\right| \ll \frac{1}{\lambda}$$

$|\underline{E}| \sim v_g|\underline{B}|$ Így:

$$\left(\Delta+\varepsilon(\underline{x})\mu\omega^2\right)\begin{pmatrix}E_\omega\\ H_\omega\end{pmatrix} \simeq 0$$

ansatz: $\boxed{\Psi(\underline{x}) = e^{i\omega S(\underline{x})/c}}$, $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

$S(\underline{x}) \to$ eikonál függvény

írjuk be:

$$\underline{\nabla}\Psi = \frac{i\omega}{c}\underline{\nabla}S\cdot\Psi$$

$$\Delta\Psi = \frac{i\omega}{c}(\Delta S)\Psi - \frac{\omega^2}{c^2}(\underline{\nabla}S)^2\Psi$$

és láttuk, hogy: $\varepsilon(\underline{x})\mu = \dfrac{n^2(x)}{c^2}$

ezzel az egyenlet:

$$\boxed{\frac{\omega^2}{c^2}\left(n^2(\underline{x}) - (\underline{\nabla}S)^2\right)\Psi + \frac{i\omega}{c}\Delta S\Psi = 0}$$

Közelítések: → $S(\underline{x}) \sim \hat{\underline{k}}\,\underline{x}$ + korrekciók, amiket a lassú változás miatt elhagyunk.

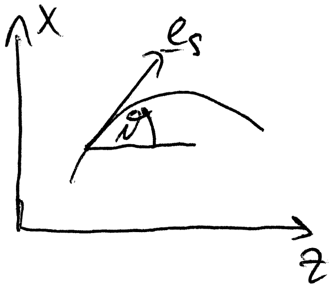
$$\to \underbrace{|\Delta S|}_{\text{ezt elhagyjuk}} < (\underline{\nabla}S)^2$$

→ ezeket felhasználva :

$$\boxed{n^2(\underline{x}) = (\underline{\nabla} S)^2} \;\Big\|$$

Geometriai optika alapegyenlete

→ Fermat-elv :



$$\underline{\nabla} S = n(\underline{x})\,\underline{e}_S$$

↑ hullám hajerkónyájának érintő irányú egységvektora

$$\underline{e}_S = \frac{d\underline{x}}{ds}$$

↑ ívhossz szerinti derivált

Ezzel: $\boxed{\frac{dS}{ds} = \underline{e}_S \underline{\nabla} S = n(\underline{x})}$ írjuk be, fejtsük sorba:

$$e^{i\frac{\omega}{c}\left(S(\underline{x}_0)+(\underline{x}-\underline{x}_0\underline{\nabla}S(\underline{x}_0))\right)} \sim e^{i\underline{k}(\underline{x})\underline{x}}$$

$S(\underline{x}_0) \sim \hat{\underline{k}}\underline{x}_0$

$$\frac{\omega}{c}\underline{e}_S\underline{\nabla}S = \underline{e}_S\underline{k}(\underline{x})$$

$$\frac{\omega}{c}n(\underline{x}) = \underline{e}_S\underline{k}(\underline{x}) \quad , \quad \underline{e}_S = \begin{pmatrix}\sin\vartheta\\0\\\cos\vartheta\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{ds}(\underline{\nabla}S) = \underline{\nabla}n(\underline{x}) \quad , \quad \frac{dn}{dx} = \frac{d}{ds}\left(n(\underline{x})\sin\vartheta\right)$$

$$\frac{d}{ds}\left(n(\underline{x})\underline{e}_S\right) = \underline{\nabla}n(\underline{x}) \quad , \quad \frac{dn}{dz} = 0 = \frac{d}{ds}\left(n(\underline{x})\cos\vartheta\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{n(\underline{x})\cos\vartheta = \bar{n} = \text{const}}$$

csak x irányú változás, z-ben ∅.

$(\cos\vartheta)_{max} = 1$, $\vartheta(x_{max}) = 0$ → itt fordul meg változócsere

$$\frac{dx}{ds}=\sin\vartheta \quad , \quad \frac{dz}{ds}=\cos\vartheta \quad \Rightarrow \quad \cos\vartheta\frac{d}{dz}=\frac{d}{ds}$$

$$n\frac{dn}{dx}=n\cos\vartheta\frac{d}{dz}\left(n(x)\sin\vartheta\right)$$

$$n\frac{dn}{dx}=\bar{n}\frac{d}{dz}\left(n(x)\frac{dx}{ds}\right)=\bar{n}\frac{d}{dz}\left(\bar{n}\frac{dx}{dz}\right)$$

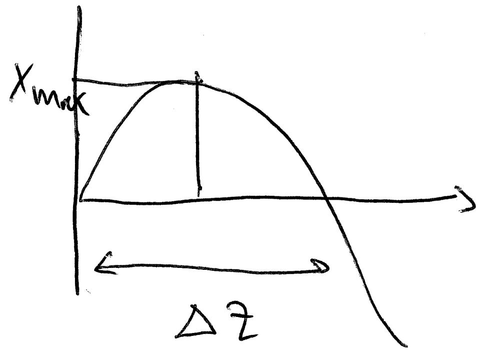
$$\frac{1}{2}\frac{dn^2}{dx}=\bar{n}^2\frac{d^2x}{dz^2}$$

csere:

$$\left.\begin{aligned} z &\leftrightarrow t \\ \bar{n}^2 &\leftrightarrow m \\ -\frac{1}{2}n^2 &\leftrightarrow V_{pot} \end{aligned}\right\}$$ Newton-egyenletet kapjuk

$$\boxed{\underbrace{-\frac{1}{2}n^2}_{V}+\underbrace{\frac{1}{2}\bar{n}^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}_{K}=\text{állandó}=-\frac{1}{2}\bar{n}^2}$$

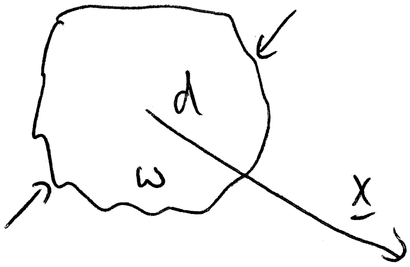
Innen: $z(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dx'}{\sqrt{\frac{n^2(x)}{\bar{n}^2}-1}}$



$$\Delta z=4\int_0^{x_{max}}\frac{dx'}{\sqrt{\frac{n^2(x')}{\bar{n}^2}-1}}$$

Fényút: $\boxed{L_{opt}=2\int_0^{x_{max}}n(s)\,ds=cT}$

9. Tétel: Az elektromágneses sugárzás keletkezése:



legyen $d \ll |\underline{x}| = r$ → későbbi sorfejtés miatt

$$\left(\phi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \frac{\varrho_\omega(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|} e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|} \right) \text{ ahol } \frac{\omega}{c} = k$$

Mágneses vektorpotenciálból indulunk, Lorentz-mérték:

és távol nézzük, ϕ nem kell.

→ időfüggés harmonikus:

$$\boxed{\underline{A}_\omega(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{j_\omega(\underline{x})}{|\underline{x}-\underline{x}'|} e^{ik|\underline{x}-\underline{x}'|}}$$

Felhasználva, hogy a távolságok egymáshoz képest igen viszonyba vannak sorfejtünk:

$$\boxed{|\underline{x}-\underline{x}'| \approx \underbrace{|\underline{x}|}_{r} - \hat{\underline{x}}\underline{x}'}, \text{ ahol } \hat{\underline{x}} = \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}$$

$$\boxed{\underline{B}_\omega(\underline{x}) = \text{rot}\, \underline{A}_\omega(\underline{x})} \text{ ezt tudjuk.}$$

Mivel $\text{rot}\, \overset{1/\mu_0 B_\omega}{\underline{H}_\omega} = -i\omega\varepsilon_0 \underline{E}_\omega(\underline{x})$ vákuum esetén, így:

$$\boxed{\underline{E}_\omega = \frac{1}{\omega\mu_0\varepsilon_0} \text{rot rot}\, \underline{A}_\omega(\underline{x})}$$

Sorfejtést elvégezve:

$$\underline{A}_\omega(\underline{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r}}_{\sim \text{ gömbhullám prefaktor}} \int d^3x' \frac{j_\omega(\underline{x}')}{\underbrace{1 - \frac{\hat{\underline{x}}\underline{x}'}{r}}} \underbrace{e^{-ik\hat{\underline{x}}\underline{x}'}}_{\text{külön-külön}}$$

→ Geometriai sorfejtést elvégezve:

$$\boxed{\underline{A}_\omega(\underline{x}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' j_\omega(\underline{x}') \sum_{n=0}^{\infty} \left(+ \frac{\underline{x}'\hat{\underline{x}}}{r} \right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-ik\hat{\underline{x}}\underline{x}')^m}$$

→ n-es tag max $\frac{1}{[\text{illegible}]}$-es járulékot adhat, mivel a teljesítmény nem csenghet le $\sim\frac{1}{r^2}$-nél gyorsabban. → $\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}$, mert 2 tag van.

→ Közelítések zónákra oszthatóak: → hosszú hullámú közelítés: $\underline{\lambda >> d}$

→ 1, $\lambda >> r >> d$ → közel zóna

2, $\lambda \sim r$ → átmeneti zóna

3, $\underline{r >> \lambda >> d}$ → sugárzási zóna

Ezt nézzük.

$$\boxed{\overline{\underline{S}}^T_\omega = \frac{1}{2\mu_0}\Big(\underset{\underset{\sim\frac{1}{r}}{\uparrow}}{\underline{E}_\omega(\underline{x})} \times \underset{\underset{\sim\frac{1}{r}}{\uparrow}}{\underline{B}^*_\omega(\underline{x})}\Big) \quad \sim \frac{1}{r^2}}$$

itt rot ⇒ $(ik)\hat{\underline{x}}\times$ lesz

$$\Rightarrow \boxed{n=0}$$

legyen: $\underline{k} = k\hat{\underline{x}} = \frac{\omega}{c}\hat{\underline{x}}$

Így:

$$\underline{A}^{(sug)}_\omega(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int d^3x'\, \underline{j}_\omega(\underline{x}')(-i\underline{k}\,\underline{x}')^m \quad , \Big\downarrow \text{rot}$$

$$\underline{B}^{(sug)}_\omega(\underline{x}) = \frac{ik\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\,\hat{\underline{x}}\times\int d^3x'\, \underline{j}_\omega(\underline{x}')(-i\underline{k}\,\underline{x}')^m$$

$$\underline{E}^{(sug)}_\omega(\underline{x}) = -\underset{\underset{\frac{k}{\mu_0\varepsilon_0\omega}}{\uparrow}}{v_f}\,\hat{\underline{x}}\times\underline{B}^{(sug)}_\omega(\underline{x})$$

→ Vegyünk $m=0$-t ⇒ elektromos dipól sugárzás:

$$\boxed{\underline{A}^{(ed,sug)}_\omega = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3x'\, \underline{j}_\omega(\underline{x}')}$$

→ Alkalmazzuk a teljes divergencia azonosságot:

$$0=\int d^3x'\,\partial_k\left(j_{\omega,k}(\underline{x}')x_i'\right)=\int d^3x'\,x_i'\,\mathrm{div}\,j_\omega(\underline{x}')+\int d^3x'\,j_{\omega,i}(\underline{x}')\Bigg\}\text{ így}$$

kontinuitási egyenlet: $\overset{\frac{\partial\varrho}{\partial t}}{\cancel{-}i\omega\varrho_\omega(\underline{x}')}+\mathrm{div}\,j_\omega(\underline{x}')=0$

$$\boxed{\int d^3x'\,j_\omega(\underline{x}')=-i\omega\underbrace{\int d^3x'\,\underline{x}'\varrho_\omega(\underline{x}')}_{\omega\text{-val rezgő dipólmomentum}}=-i\omega\underline{d}_\omega}$$

$$\Rightarrow\boxed{\underline{A}_\omega(\underline{x})^{(ed,sug)}=-\frac{\mu_0}{4\pi}i\omega\frac{e^{ikr}}{r}\underline{d}_\omega}$$

Rotálás után:

$$B_{\omega,i}=\frac{-\mu_0}{4\pi}i\omega\frac{1}{r}\varepsilon_{ijk}\left(\partial_je^{ikr}\right)d_{\omega,k}$$

$$\boxed{\underline{B}^{(ed,sug)}_\omega(\underline{x})=\frac{\cancel{k}\mu_0\omega}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\underline{x}}\times\underline{d}_\omega}\rightarrow\text{ transzverzális irányú}$$

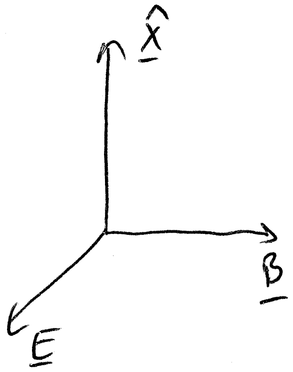
$$\hat{\underline{x}}\underline{B}_\omega=0$$

$$\underline{E}_\omega(\underline{x})=\frac{i}{\omega\varepsilon_0\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\underline{B}_\omega\qquad(\mathrm{rot}\,\underline{H}\text{-s Maxwell})$$

$$\underline{E}^{(ed,sug)}_\omega(\underline{x})=\frac{i\cancel{\mu_0}\cancel{\omega}k}{\varepsilon_0\cancel{\mu_0}\cancel{\omega}}\cdot\frac{ik}{4\pi r}e^{ikr}\hat{\underline{x}}\times(\hat{\underline{x}}\times\underline{d}_\omega)$$

$$\boxed{\underline{E}^{(ed,sug)}_\omega(\underline{x})=-\frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\underline{x}}\times(\hat{\underline{x}}\times\underline{d}_\omega)}$$

$$\boxed{\underline{E}^{(ed,sug)}_\omega(\underline{x})=-\frac{k}{\mu_0\varepsilon_0\omega}\hat{\underline{x}}\times\underline{B}^{(ed,sug)}_\omega=-v_f\hat{\underline{x}}\times\underline{B}^{(ed,sug)}_\omega}$$

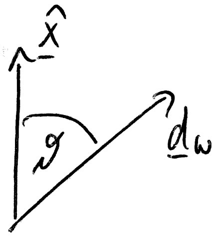


Felhasználva, hogy $\overline{\underline{S}}^T_\omega=\frac{1}{2\mu_0}(E_\omega\times B^*_\omega)$, leírva, a ket kapjuk:

$$\overline{\underline{S}}_\omega^T = \frac{1}{2\mu_0} v_f \left(\left(\underline{B}_\omega^{(ed,sug)*} \times \hat{\underline{x}} \right) \times \underline{B}_\omega^{(ed,sug)} \right)$$

Mivel $\underline{B}^* \times (\hat{\underline{x}} \times \underline{B}) = \hat{\underline{x}} |\underline{B}_\omega|^2$, így

$$\boxed{\overline{\underline{S}}_\omega^T = \frac{v_f}{2\mu_0} \hat{\underline{x}} \left| \underline{B}_\omega^{(ed,sug)} \right|^2}$$



→ Sugárzási teljesítmény:

$$\overline{P}^T = \int d\Omega\, r^2 \hat{\underline{x}} \overline{\underline{S}}_\omega^T = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 v_f} \int d\Omega \left| \hat{\underline{x}} \times \underline{d}_\omega \right|^2 = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 v_f} |\underline{d}_\omega|^2 \underbrace{\int d\Omega \sin^2\vartheta}_{\frac{8\pi}{3}}$$

Ezzel: $\boxed{\overline{P}^T = \frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi v_f} |\underline{d}_\omega|^2}$

⇒ m=1 eset: mágneses dipól, elektromos kvadrupól:

$\int d^3x' \, \underline{j}_\omega(\underline{x}') (\hat{\underline{x}} \underline{x}')$ az integrál → eztanti- és szimmetrikus tagokra bontom

↓ mágn. dipól. ↓ él. kvadrupol

$$\frac{1}{2} \underbrace{\int d^3x' \left[\underline{j}_\omega(\underline{x}') (\hat{\underline{x}} \underline{x}') - \underline{x}' (\hat{\underline{x}} \underline{j}_\omega) \right]}_{md} + \frac{1}{2} \underbrace{\int d^3x' \left[\underline{j}_\omega(\underline{x}') (\hat{\underline{x}} \underline{x}') + \underline{x}' (\hat{\underline{x}} \underline{j}_\omega) \right]}_{eq}$$

→ Mágneses dipóltag: $\frac{1}{2} \int d^3x' \left[\underline{j}_\omega(\underline{x}') (\hat{\underline{x}} \underline{x}') - \underline{x}' (\hat{\underline{x}} \underline{j}_\omega) \right] =$

$$= \frac{1}{2} \int d^3\underline{x}' \left[\hat{\underline{x}} \times \left(\underline{j}_\omega(\underline{x}) \times \underline{x}' \right) \right]$$ ezt beírva:

$$\boxed{\underline{A}_\omega^{(md,sug)}(\underline{x}) = \frac{i k \mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\underline{x}} \times \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3x' \left(\underline{x}' \times \underline{j}_\omega(\underline{x}) \right)}_{\underline{m}_\omega}}$$ → –t a vektorszorzás megcserélésével eltüntetni

→ mágneses dipólmomentum segítségével:

$$\boxed{\underline{A}^{(md,sug)}_\omega(\underline{x}) = \frac{ik\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\underline{x}}\times\underline{m}_\omega}$$

$$\boxed{\underline{B}^{(md,sug)}_\omega(\underline{x}) = -\frac{k^2\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\underbrace{\hat{\underline{x}}\times(\hat{\underline{x}}\times\underline{m}_\omega)}_{\hat{\underline{x}}(\hat{\underline{x}}\underline{m}_\omega)-\underline{m}_\omega}}$$

$$\boxed{\underline{E}^{(md,sug)}_\omega(\underline{x}) = \frac{v_f k^2\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\underline{x}}\times\underline{m}_\omega}$$

→ duális szimmetria:

$$\left.\begin{array}{l}\underline{m}_\omega \leftrightarrow \underline{d}_\omega\\ \underline{E}^{(md)}_\omega \leftrightarrow \underline{B}^{(ed)}_\omega\\ \underline{B}^{(md)}_\omega \leftrightarrow \underline{E}^{(ed)}_\omega\end{array}\right\}$$

már a Maxwell-egyenletekből látszik

polarizáció merőleges a síkra

$$\boxed{\overline{\underline{S}}^{T(md)}_\omega = \frac{1}{2\mu_0 v_f}\left[\underline{E}^{(md)}_\omega(\underline{x})\times\left(\hat{\underline{x}}\times\underline{E}^{*(md)}_\omega(\underline{x})\right)\right] = \frac{v_f\mu_0 k^4}{32\pi^2}\frac{1}{r^2}\hat{\underline{x}}\left|\hat{\underline{x}}\times\underline{m}_\omega\right|^2}$$

$$\boxed{\overline{P}^T = \frac{\mu_0\omega^4}{12\pi v_f^3}\left|\underline{m}_\omega\right|^2}$$

→ Elektromos kvadrupol tag:

→ korábban láttuk az alábbi azonosságot:

$$0=\int d^3x'\left[f\partial_k g\, j_{\omega,k} + g\,\partial_k f\, j_{\omega,k} + fg\,\overbrace{i\omega\rho_\omega}^{\mathrm{div}\,\underline{j}_\omega\quad \partial_k j_{\omega,k}}\right]$$

legyen itt $f = x'_l$, $g = x'_j$, ezzel:

$$-i\omega\int d^3x'\, x_i' x_j' \rho_\omega = \int d^3x' \left(x_\ell' j_{\omega,\ell} + x_j' j_{\omega,\ell}\right)$$ → pont ez kell:

$$\frac{1}{2}\int d^3x' \left[\underline{j}_\omega(\hat{\underline{x}}\,\underline{x}') + \underline{x}'(\hat{\underline{x}}\,\underline{j}_\omega)\right] = \underline{-\frac{i\omega}{2}\int d^3x'\, \underline{x}'(\hat{\underline{x}}\,\underline{x}')\,\rho_\omega(\underline{x}')}$$

→ **Kvadrupol momentum tenzor** :

→ így nincs spurja

$$\boxed{Q_{\omega,\alpha\beta} = \int d^3x'\, \rho_\omega(\underline{x}')\left(3x_\alpha' x_\beta' - \delta_{\alpha\beta}\,\underline{x}'^2\right)}$$

$$Q_{\omega,\alpha} = Q_{\omega,\alpha\beta}\cdot \hat{x}_\beta$$

ezeket akarom összehozni

$$\boxed{\underline{A}_\omega^{(eq,sug)}(\underline{x}) = -\frac{\omega k\mu_0}{8\pi}\,\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3x'\,\underline{x}'(\hat{\underline{x}}\,\underline{x}')\rho_\omega(\underline{x}')}$$

$$\hat{\underline{x}}\times \underline{Q}_\omega(\hat{\underline{x}}) = 3\int d^3x'\,\rho_\omega(\underline{x}')\left(\hat{\underline{x}}\times\underline{x}'\right)\left(\underline{x}'\hat{\underline{x}}\right)$$ → ez pont jó, csak tripla

Innen: $$\boxed{\underline{B}_\omega^{(eq,sug)}(\underline{x}) = -\frac{i\omega k^2\mu_0}{8\pi}\,\frac{e^{ikr}}{r}\,\frac{1}{3}\hat{\underline{x}}\times \underline{Q}_\omega(\hat{\underline{x}})}$$

$$\overline{\underline{S}}_\omega^T = \frac{v_f}{2\mu_0}|\underline{B}_\omega|^2\,\hat{\underline{x}}$$ → itt csak numerikusan

$$\boxed{\frac{d\overline{P}_{eq}^T}{d\Omega} = \frac{\mu_0 v_f\,\omega^2 k^4}{1152\pi^2}\left|\hat{\underline{x}}\times\underline{Q}_\omega(\hat{\underline{x}})\right|^2}$$

$$\frac{d\overline{P}_{eq}^T}{d\Omega} \sim \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \frac{d\overline{P}_{ed}^T}{d\Omega}$$

10. Tétel: Töltött részecske mozgása: a Liénard–Wiechert potenciál:

Vegyünk $\underline{x}_0(t)$ trajektóriát, ezen mozog a részecske $\dot{\underline{x}}_0(t)$ sebességgel.

Ekkor a töltéssűrűség és áramerősség:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho(\underline{x},t) &= q\,\delta(\underline{x}-\underline{x}_0(t)) \\ \underline{j}(\underline{x},t) &= q\,\dot{\underline{x}}_0(t)\,\delta(\underline{x}-\underline{x}_0(t)) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\underline{A}(\underline{x},t) + \frac{1}{c^2}\dot{\phi}(\underline{x},t) = 0}$$

⇒ Retardált potenciál alakja Lorentz-mérték esetén:

$$\phi(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \int dt' \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\delta^{(3)}(\underline{x}'-\underline{x}_0(t))\,\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right) =$$

$$\boxed{\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt' \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t')|}\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{x}-\underline{x}_0(t')|}{c}\right)}$$

ennek a retardált időpillanat a megoldása

$$t_s = t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_s)|}{c}$$

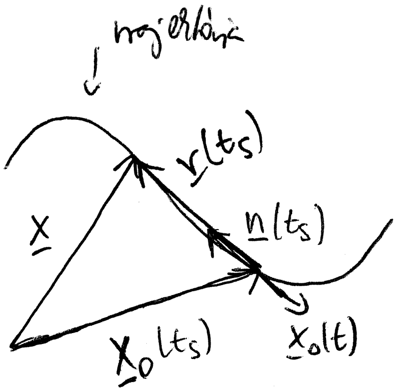
Vegyünk egy ilyen függvényt, megsejtjük a megoldást

$$f(t') = t'-t+\frac{|\underline{x}-\underline{x}_0(t')|}{c} = \left.\frac{df(t')}{dt'}\right|_{t_s}(t'-t_s)$$, ez jó, mert

$$\delta(f(t')) = \frac{1}{\left.\frac{df}{dt'}\right|_{t=t_s}}\delta(t'-t_s)$$

⇒ Ezzel a trükkel már a dt'-szerinti integrálás elvégezhető:

$$\boxed{\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_s)|}\,\frac{1}{\left.\frac{df}{dt'}\right|_{t_s}}}$$



$$\left.\frac{df}{dt'}\right|_{t_s} = 1 + \frac{1}{c}\,\frac{\underline{x}-\underline{x}_0(t_s)}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_s)|}\left(-\dot{\underline{x}}_0(t_s)\right)$$

Legyen $\underline{n}(t_s) = \frac{\underline{x}-\underline{x}_0(t_s)}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_s)|}$, így

$$\left.\frac{df}{dt'}\right|_{t_s} = 1 - \frac{\underline{n}(t_s)\dot{\underline{x}}_0(t_s)}{c}$$, beírva:

$$\boxed{\phi(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_s)|}\,\frac{1}{1-\frac{\underline{n}(t_s)\dot{\underline{x}}_0(t_s)}{c}}}$$

B-S:

$$\underline{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{\underline{j}(\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

$$\boxed{\underline{A}(\underline{x},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\,\dot{\underline{x}}_0(t_s)\,\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0(t_s)|}\,\frac{1}{1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}} = \frac{1}{c^2}\,\dot{\underline{x}}_0(t_s)\,\phi(\underline{x},t)}$$

Legyen $r(t_s) = |\underline{x}-\underline{x}_0(t_s)|$, $\boxed{\underline{r}(t_s) = \underline{x}-\underline{x}_0(t_s)}$, így $r = c(t-t_s)$,

$\underline{r} = \underline{n}\,r$

továbbá $\boxed{R(t_s) = r(t_s)\left(1 - \frac{\underline{n}(t_s)\dot{\underline{x}}_0(t_s)}{c}\right)}$

Ezzel $\boxed{\phi(\underline{x},t_s) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R(t_s)}}$

$$\boxed{\underline{E}(\underline{x},t) = -\underline{\nabla}\phi(\underline{x},t) - \dot{\underline{A}} = -\frac{1}{c^2}\left[\ddot{\underline{x}}_0(t_s)\frac{dt_s}{dt}\phi(\underline{x},t) + \dot{\underline{x}}_0(t_s)\frac{\partial\phi}{\partial t_s}\frac{dt_s}{dt}\right] - \underline{\nabla}_x\phi(\underline{x},t)}$$

Ez borzalmas, tagonként nézzük:

$$-\underline{\nabla}_x\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R^2(t_s)}\,\underline{\nabla}_x R(t_s)\,,\quad \frac{\partial\phi}{\partial t_s} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R^2(t_s)}\,\frac{\partial R}{\partial t_s}$$

→ ezeken kívül kell még a $\frac{dt_s}{dt}$ is:

$$r = c(t-t_s)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dt_s}{dt}\cdot\frac{dr}{dt_s} \overset{\downarrow}{=} c\left(1-\frac{dt_s}{dt}\right)$$ → tehát ez jó lesz

$$\underline{\frac{dr}{dt_s}} = \frac{d(\underline{n}\,\underline{r}(t_s))}{dt_s} = \frac{d\underline{n}}{dt_s}\underline{r} + \underline{n}\frac{d\underline{r}}{dt_s} = \underline{\frac{d\underline{n}}{dt_s}\underline{r} - \underline{u}\,\underline{\dot{x}}_0(t_s)}$$

$$\underline{\frac{d\underline{n}}{dt_s}} = \frac{d\underline{r}}{dt_s}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\underline{r}\frac{dr}{dt_s} = \underline{-\underline{\dot{x}}_0\frac{1}{r} - \frac{\underline{u}}{r}\frac{dr}{dt_s}}$$

Ezzel: $\frac{dr}{dt_s} = -\underline{u}\,\underline{\dot{x}}_0 - \frac{dr}{dt_s} - \underline{u}\,\underline{\dot{x}}_0 \Rightarrow \boxed{\frac{dr}{dt_s} = -\underline{u}\,\underline{\dot{x}}_0}$

Így: $\boxed{\frac{dt_s}{dt} = \frac{1}{1-\frac{\underline{u}\,\underline{\dot{x}}_0}{c}}}$

Következő:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t_s} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R^2}\right)\frac{dR}{dt_s}$$

$$\underline{\frac{dR}{dt_s}} = \frac{dr}{dt_s} - \frac{1}{c}\frac{d\underline{r}}{dt_s}\underline{\dot{x}}_0 - \frac{\underline{r}\,\underline{\ddot{x}}_0}{c} = \underline{-\underline{u}\,\underline{\dot{x}}_0 + \frac{1}{c}\underline{\dot{x}}_0^2 - \frac{\underline{r}\,\underline{\ddot{x}}_0}{c}}$$, így

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t_s} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\left(-\underline{u}\,\underline{\dot{x}}_0 + \frac{1}{c}\underline{\dot{x}}_0^2 - \frac{\underline{r}\,\underline{\ddot{x}}_0}{c}\right)}$$

Végül:

$$-\underline{\nabla}_x\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\underline{\nabla}_x R$$

$$\underline{\nabla}_x R = \underline{n} - \frac{\underline{\dot{x}}_0}{c} + \frac{dR}{dt_s}\underline{\nabla}_x t_s$$

$\underline{\nabla}_{\underline{x}} t_s \Rightarrow$ ehhez megint vegyük észre móka: r két defjéből :

→ ezt beírva

$$\underline{\nabla}_{\underline{x}} r = \underbrace{-c\,\underline{\nabla}_{\underline{x}} t_s = \underline{n} + \frac{dr}{dt_s}\underline{\nabla}_{\underline{x}} t_s}$$

$$\boxed{\underline{\nabla}_{x} t_s = -\frac{\underline{n}}{c}\frac{1}{1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}}}$$

→ beírogatva megvan $\underline{\nabla}_x R$ és $\underline{\nabla}_x \phi$

Ezzel (fogjuk vissza magunkat):

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{E}(\underline{x},t) = {} & \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\left[\underline{n} - \frac{\dot{\underline{x}}_0}{c} - \frac{1}{c}\frac{\underline{n}}{1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}}\left(-\underline{n}\dot{\underline{x}}_0 + \frac{1}{c}\dot{\underline{x}}_0^2 - \frac{\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0}{c}\right)\right] - \\ & - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}}\frac{1}{c^2}\left[\ddot{\underline{x}}_0\frac{1}{R} - \frac{\dot{\underline{x}}_0}{R^2}\left(-\underline{n}\dot{\underline{x}}_0 + \frac{1}{c^2}\dot{\underline{x}}_0^2 - \frac{\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0}{c}\right)\right]\end{aligned}}$$

Csoportosítsuk át (így se látjuk mondjuk át): gyorsulásos, sebesség^2-es és sebességes tagok szerint

+ egyéb

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{E}(\underline{x},t) = {} & \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}}\left[-\frac{1}{c^2}\frac{1}{R}\ddot{\underline{x}}_0 - \frac{1}{c^3R^2}\dot{\underline{x}}_0(\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0) + \frac{1}{c^2R^2}\underline{n}(\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0)\right] + \\ & + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2\left(1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)}\left(-\frac{1}{c^2}\underline{n}\dot{\underline{x}}_0^2 + \frac{1}{c^3}\dot{\underline{x}}_0\cdot\dot{\underline{x}}_0^2\right) + \\ & + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left[\underline{n} - \frac{\dot{\underline{x}}_0}{c} + \frac{\underline{n}}{c}\cdot\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}} - \frac{\dot{\underline{x}}_0(\underline{n}\dot{\underline{x}}_0)}{c^2\left(1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)}\right]\end{aligned}}$$

Láttuk, hogy $\underline{R} = \underline{r}\left(1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)$, $n\underline{R} = R$, így $\underline{R} = r\underline{n}\left(\underline{n}-\frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)$ és $\underline{R} = \underline{r}\left(\underline{n}-\frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)$. Jelölje $\boxed{\hat{\underline{R}} = \frac{\underline{R}}{R}}$

Az utolsó tag átrendezhető ezt alapján: $\sim\frac{\underline{r}}{R}$

$$\left(\underline{n}-\frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)\left(1+\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c\left(1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)}\right) = \left(\underline{n}-\frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)\frac{1}{1-\frac{\underline{n}\dot{\underline{x}}_0}{c}} = \frac{\underline{R}}{R} = \hat{\underline{R}}$$

, a teljes kifejezés:

Utolsó tag:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{\underline{R}}{R} = \frac{q\underline{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \sim \frac{1}{R^2}$$

Középső tag: $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\frac{\underline{R}}{R}\left(-\frac{\dot{\underline{x}}_0^2}{c^2}\right) \sim \frac{1}{R^2}$ (hasonló átírással)

$$\frac{r}{R}\left(\underline{n}-\frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right) = \hat{\underline{R}}$$

Első tag:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\left[-\frac{1}{c^2}\frac{r}{R}\ddot{\underline{x}}_0 + \frac{r}{c^2R^2}(\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0)\left(\underline{n}-\frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right)\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{1}{c^2}\left[\underbrace{-r\ddot{\underline{x}}_0+(\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0)\hat{\underline{R}}}_{\underline{r}\times[\hat{\underline{R}}\times\ddot{\underline{x}}_0]}\right] \sim \frac{1}{R}$$

, mivel $\underline{r} = r\hat{\underline{R}} = \overbrace{r\frac{\underline{R}}{\cancel{R}}}^{r\cancel{R}}$

Így:

$$\boxed{\underline{E}(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\hat{\underline{R}}}{R^2}\left(1-\frac{\dot{\underline{x}}_0^2}{c^2}\right)+\frac{1}{c^2R^2}\underline{r}\times[\hat{\underline{R}}\times\ddot{\underline{x}}_0]\right]}$$

Ebből a sugárzási tag az 1/R-es kell, hogy legyen:

$$\boxed{\underline{E}_{sug}(\underline{x},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi R^2}\underline{r}\times\left(\hat{\underline{R}}\times\ddot{\underline{x}}_0\right)} \quad , \quad \boxed{\underline{n}\,\underline{E}_{sug} = 0}$$

→ B-re:

$$B_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\frac{1}{c^2}\dot{x}_{0,k}\phi\right) = \frac{1}{c^2}\varepsilon_{ijk}\left(\ddot{x}_{0,k}\phi\,\partial_j t_s + \dot{x}_{0,k}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)$$

→ szerencsére ebből már minden volt, így:

$$\boxed{\underline{B}_{sug}(\underline{x},t) = -\frac{\mu_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^2}\left[\underline{n}\times\ddot{\underline{x}}_0+(\underline{n}\times\dot{\underline{x}}_0)\frac{r}{cR}(\underline{n}\ddot{\underline{x}}_0)\right]}$$

$\boxed{\underline{B}_{sug} = \frac{1}{c}\underline{n}\times\underline{E}_{sug}}$ beírva kijön.

→ Pillanatnyi sugárzási teljesítmény:

$$\underline{S}(\underline{x},t) = \frac{1}{\mu_0}\left(\underline{E}_{sug}\times\underline{B}_{sug}\right) = \frac{1}{\mu_0 c}\,\underline{n}(t_s)\,E^2_{sug}(\underline{x},t) =$$

$$\underline{S}(\underline{x},t) = \frac{1}{\cancel{\mu_0} c}\,\underline{n}\,\frac{\mu_0^{\cancel{2}} q^2}{16\pi^2 R^4}\left[\hat{\underline{R}}(\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0) - \ddot{\underline{x}}_0 r\right]^{\overset{\underline{r}\hat{\underline{R}}}{2}}$$

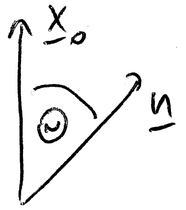
$$\boxed{\underline{S}(\underline{x},t) = \underline{n}\,\frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c R^4}\left[\hat{\underline{R}}(\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0) - \ddot{\underline{x}}_0 r\right]^2}$$

→ Nem relativisztikus határeset: $\left|\frac{\dot{\underline{x}}_0}{c}\right| \ll 1 \Rightarrow \boxed{R\approx r}$ $\quad\hat{\underline{R}}\approx\underline{n}$

Az $\hat{\underline{R}}$-os kifejezés az alábbi szerint alakítható: r^2-et kiemelve

$$(\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0)^2 - 2(\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0)^2 + r^2\ddot{\underline{x}}_0^2 = r^2\ddot{\underline{x}}_0^2 - (\underline{r}\ddot{\underline{x}}_0)^2 \quad \text{, így} \quad \left(\frac{r^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}\right)$$

$$\boxed{\underline{S}^{(nemrel)}(\underline{x},t) = \underline{n}\,\frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c r^2}\left(\ddot{\underline{x}}_0^2 - (\underline{n}\ddot{\underline{x}}_0)^2\right)}$$



$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

→ Sugárzási teljesítmény, a Larmor-képlet:

$$P = \int \underline{S}\,\underline{n}\cdot r^2 d\Omega = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c}\,\ddot{\underline{x}}_0^2 \underbrace{\int d\Omega\,(1-\cos^2\Theta)}_{\frac{8\pi}{3}} \cdot\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} =$$

bővítés, c^3-t akarok

$$\boxed{P = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,\ddot{\underline{x}}_0(t_s)}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2\,\ddot{\underline{x}}_0^2}{16\pi^2 c^3}\sin\Theta$$

→ Lineáris és körpályán gyorsuló töltés sugárzása, relativisztikus mozgások:

Legyen $\boxed{\underline{\beta} = \frac{1}{c}\dot{\underline{x}}_0}$ így $\dot{\underline{\beta}} = \frac{1}{c}\ddot{\underline{x}}_0$, $\boxed{\underline{R} = r(\underline{n}-\underline{\beta}),\ R = r(1-\underline{n}\underline{\beta})}$,

$\boxed{\hat{\underline{R}} = \frac{\underline{n}-\underline{\beta}}{1-\underline{n}\underline{\beta}}}$, így átírva:

$$\boxed{\underline{E}_{sug}(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^{8} r}\frac{1}{(1-\underline{n}\underline{\beta})^2}\underline{n}\times\left(\frac{\underline{n}-\underline{\beta}}{1-\underline{n}\underline{\beta}}\times\cancel{c}\dot{\underline{\beta}}\right)}$$

Energia érdekel még:

$$\underbrace{r^2|\underline{S}|^{(t(t_s))} = \frac{1}{c^2}\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\cdot\frac{1}{(1-\underline{n}\underline{\beta})^6}\left[\underline{n}\times((\underline{n}-\underline{\beta})\times\dot{\underline{\beta}})\right]^2\cdot\frac{1}{\mu_0 c}\cdot\frac{1}{\cancel{r^2}}\cdot\cancel{r^2}}$$

→ Keressük a $t_s \in (T_1, T_2)$ intervallum alatt kibocsátott energiát

$$\downarrow$$

$$t \in \left(T_1 + \frac{r(T_1)}{c}, T_2 + \frac{r(T_2)}{c}\right)$$ beérkezés, detektálás

$$\left.\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega}\right|_{det} = \int_{T_1+\frac{r(T_1)}{c}}^{T_2+\frac{r(T_2)}{c}} dt\, r^2\, \underline{n}\underline{S}\Big|_{t_s} \overset{\text{változócsere, } t_s \text{ kell}}{=} \int_{T_1}^{T_2} dt_s \underbrace{\frac{dt}{dt_s}}_{\text{láttuk: } (1-\underline{n}\underline{\beta})} \overbrace{r^2(t_s)(\underline{n}\underline{S})\Big|_{t_s}}^{|\underline{S}|\cdot r^2} =$$

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\int_{T_1}^{T_2} dt_s \frac{1}{(1-\underline{n}\underline{\beta})^5}\left[\underline{n}\times((\underline{n}-\underline{\beta})\times\dot{\underline{\beta}})\right]^2}$$

→ lineáris gyorsító : $\underline{\beta} \parallel \dot{\underline{\beta}}$:

$$\underline{n}\times\left((\underline{n}-\underline{\beta})\times\dot{\underline{\beta}}\right) \Rightarrow \underline{n}\times(\underline{n}\times\dot{\underline{\beta}}) = \underbrace{\underline{n}(\underline{n}\dot{\underline{\beta}})-\dot{\underline{\beta}}}_{}$$

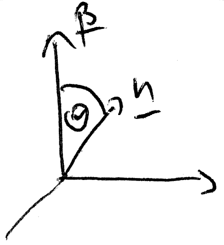
$\underline{\beta}\times\dot{\underline{\beta}}=0$

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\int_{T_1}^{T_2} dt_s \frac{1}{(1-\underline{n}\underline{\beta})^5}\left(\underline{n}\times(\underline{n}\times\dot{\underline{\beta}})\right)^2 =$$

~~[illegible]~~

$$= \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\int_{T_1}^{T_2} dt_s \frac{1}{(1-\beta\cos\Theta)^5}\left(\dot{\beta}^2-(\underline{n}\dot{\underline{\beta}})^2\right)$$

$$\left(\underline{n}(\underline{n}\dot{\underline{\beta}})-\dot{\underline{\beta}}\right)^2 = \cancel{(\underline{n}\dot{\underline{\beta}})^2}+\dot{\beta}^2 - \underbrace{2\,\underline{n}(\underline{n}\dot{\underline{\beta}})\dot{\underline{\beta}}}_{} - \cancel{2}(\underline{n}\dot{\underline{\beta}})^2$$



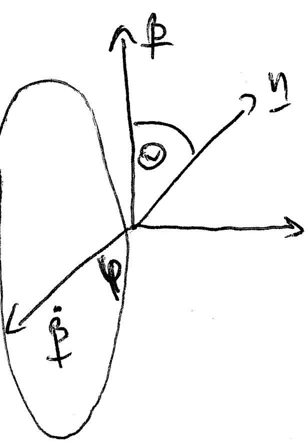
ha $|\dot{\underline{\beta}}|$ nem változik és β ≥ irányba mutat, akkor (lefogalom pl) :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} \approx \frac{q^2\dot{\beta}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\int_{T_1}^{T_2} dt_s \frac{\sin^2\Theta}{(1-\beta\cos\Theta)^5}}$$

→ adott β esetén a szögre max: $\boxed{\Theta_{max} \sim \frac{1}{2}\sqrt{1-\beta^2}}$

→ Szinkrotron gyorsító : $\underline{\beta} \perp \dot{\underline{\beta}}$:

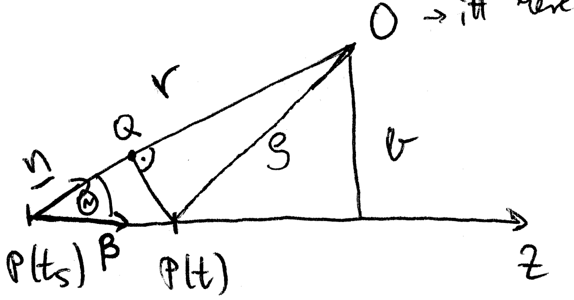
$$\underline{n}\times\left[\underline{n}\times\dot{\underline{\beta}}-\underline{\beta}\times\dot{\underline{\beta}}\right] = \underline{n}(\underline{n}\dot{\underline{\beta}})-\dot{\underline{\beta}}-\underline{\beta}(\underline{n}\dot{\underline{\beta}})+\dot{\underline{\beta}}(\underline{n}\underline{\beta}) = (\underline{n}-\underline{\beta})(\underline{n}\dot{\underline{\beta}})+\dot{\underline{\beta}}(\underline{n}\underline{\beta}-1)$$



Beírva, négyzetre emelve, szögeket átírva

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} \approx \frac{q^2\dot{\beta}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c}\int_{T_1}^{T_2} dt_s\left[\frac{1}{(1-\beta\cos\Theta)^3}+\frac{(\beta^2-1)\sin^2\Theta\cos^2\varphi}{(1-\beta\cos\Theta)^5}\right]}$$

11. Tétel: Relativisztikus egyenes vonalú, egyenletes mozgást végző töltés tere:



→ itt keressük a teret

b - impakt paraméter

t_s-t akarom kifejezni, P(t)-vel kif.

GEOMETRIA :(

Szakaszok: $\overline{OP(t_s)} = r = c(t-t_s)$

$\overline{P(t_s)P(t)} = v(t-t_s) = \beta r$ → retardált idő kifejezése

$\overline{P(t_s)Q} = \hat{\underline{\beta}}\,\underline{n}\,\beta r = \underline{\beta}\,\underline{n}\,r = \underline{\beta}\,\underline{r}(t_s)$

$\overline{QO} = r - \underline{\beta}\,\underline{n}\,r = r(1-\underline{n}\,\underline{\beta}) = R$ (korábbról)

Magasságok:
$$\left\{\begin{aligned} \overline{QP(t)}^2 &= \varrho^2 - R^2 \\ \overline{QP(t)}^2 &= (\beta r)^2 - r^2(\underline{\beta}\,\underline{n})^2 = \beta^2 r^2 \overbrace{(1-\cos^2\Theta)}^{\sin^2\Theta} = \beta^2 r^2 \end{aligned}\right\}$$

2 ⊿

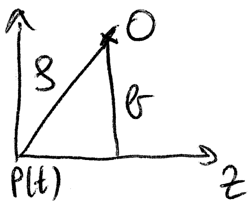
Utolsó 3-ból R kifejezhető:

$$\varrho^2 = r^2(1-\underline{n}\,\underline{\beta})^2 + r^2\left(\beta^2 - (\underline{\beta}\,\underline{n})^2\right) = R^2 + \beta^2 b^2$$

$$\boxed{R = \sqrt{\varrho^2 - \beta^2 b^2}}$$

Láttuk, hogy $\phi(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R(t_s)}$, előbbit leírva:

$$\boxed{\phi(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - \beta^2 b^2}}}$$



→ Beteszem P(t)-t az origóba:

$$\boxed{\varrho^2 = z^2 + b^2}$$

és ezt beírom:

$$\boxed{\phi(\underline{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+(1-\beta^2)b^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2+\frac{z^2}{1-\beta^2}}}}$$

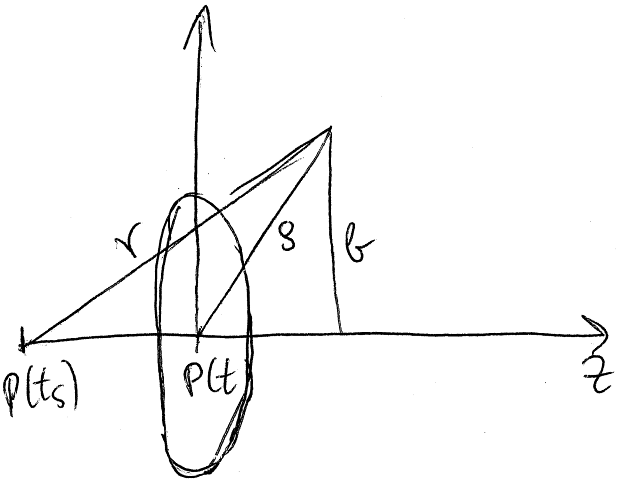
transzformáció:

$$\boxed{q_{tr} = \frac{q}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad z_{tr} = \frac{z}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

→ Ekvipotenciális felületek:

$$\boxed{b^2 + \frac{z^2}{1-\beta^2} = \text{állandó}}$$

→ longitudinálisan belapósodó ellipszoid



⇒ Cserenkov-sugárzás:

→ legyen $v_0 > v_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu}}$, de állandó

→ Hullámegyenletek Lorentz-mértékben, Fourier-térben:

$$\boxed{\left(\varepsilon(\omega)\mu\omega^2 - \underline{q}^2\right)\begin{pmatrix}\Phi(\underline{q},\omega)\\ \underline{A}(\underline{q},\omega)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon(\omega)}\rho(\underline{q},\omega)\\ \mu\,\underline{j}(\underline{q},\omega)\end{pmatrix}}$$

Inverz ~~Fourier~~-vel kapjuk az $(\underline{x},t)$ térben lévő megoldásokat:

$$F(\underline{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3q\int d\omega\, e^{i(\underline{q}\underline{x}-\omega t)}\, F(\underline{q},\omega)$$

Itt ϱ-ra kell: $\boxed{\omega = \underline{q}\,\underline{v}_0}$

$$\varrho(\underline{x},t) = Q\,\delta^{(3)}(\underline{x}-\underline{v}_0 t) = \frac{Q}{(2\pi)^3}\int d^3q\, e^{i(\underline{q}\underline{x}-\underline{q}\,\underline{v}_0 t)}\int d\omega\,\delta(\omega-\underline{q}\,\underline{v}_0) =$$

$$\boxed{\varrho(\underline{x},t) = \frac{Q}{(2\pi)^3}\int d^3q\int d\omega\,\delta(\omega-\underline{q}\,\underline{v}_0)\,e^{i(\underline{q}\underline{x}-\omega t)}}$$

Innen $$\boxed{\begin{aligned}\varrho(\underline{q},\omega) &= \frac{Q}{2\pi}\delta(\omega-\underline{q}\,\underline{v}_0)\\ \underline{j}(\underline{q},\omega) &= \underline{v}_0\,\varrho(\underline{q},\omega)\end{aligned}}$$

Ezzel a hullámegyenlet formális megoldása:

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(\underline{q},\omega) &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon(\omega)}\,\frac{\delta(\omega-\underline{q}\,\underline{v}_0)}{\underline{q}^2-\varepsilon(\omega)\mu\omega^2}\\ \underline{A}(\underline{q},\omega) &= \varepsilon(\omega)\,\mu\,\underline{v}_0\,\Phi(\underline{q},\omega)\end{aligned}}$$

Fizikai megoldás: Fourier-integrál kiszámítás a kauzalitási feltétel mellett:

$$\boxed{\underline{A}(\underline{x},t) = \frac{Q\mu}{2\pi}\,\underline{v}_0\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q\int d\omega\, e^{i(\underline{q}\underline{x}-\omega t)}\,\frac{\delta(\omega-\underline{q}\,\underline{v}_0)}{\underline{q}^2-\varepsilon(\omega)\mu\omega^2}}$$

Legyen $\underline{v}_0 \parallel \underline{e}_x$, ezzel $\underline{q}$ felbontható:

$\underline{q}^2 = q_x^2 + \underline{q}_{tr}^2$, nevező: $\underline{\omega = q_x v_0}$

$q_x^2 + \underline{q}_{tr}^2 - \varepsilon(q_x v_0)\mu q_x^2 v_0^2 = q_x^2\left(1-\beta^2(q_x v_0)\right) + \underline{q}_\perp^2$, ahol bevezettük:

$\frac{v_0^2}{v_f^2} = \beta^2$, $v_f = \frac{1}{\varepsilon(v_0 q_x)\mu}$, $\underline{\beta^2 = \varepsilon(q_x v_0)\mu v_0^2}$-et

Beírva és az ω-szerinti integrált elvégezve:

$$\boxed{\underline{A}(\underline{x},t)=\frac{Q\mu}{2\pi}\,\underline{v}_0\,\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\kappa_x\int d^2\underline{\kappa}_\perp\,\frac{1}{\kappa_x^2(1-\beta^2)+\underline{\kappa}_\perp^2}\,e^{i(\underline{\kappa}_\perp\underline{x}_\perp+\kappa_x(x-v_0t))}}$$

→ Problem, hogy κ_x van a nevezőben.

Ha $\beta<1$ ⇒ belapult Ampère-tv-t kapunk

Ha $\beta>1$ ⇒ pólusok vannak → kauzalitás!
és nem fizikai

Legyen $\xi=x-v_0t$, ezzel, ha $\xi>0$ a részecske előtt,
ha $\xi<0$ a részecske mögött vagyok

Kauzalitás miatt $\boxed{\underline{A}(x,\underline{x}_\perp,t)=0\ ,\ \text{ha}\ \xi>0}$

Mivel az integrált nem tudom elvégezni, így közelítek:

$\boxed{\varepsilon(\kappa_x v_0)\approx\varepsilon}$ → κ_x függést elvesztem

Skálázzuk át az integrált:

$\boxed{\underline{\kappa}_\perp'=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\underline{\kappa}_\perp}$ → $d^2\underline{\kappa}_\perp'=\frac{1}{\beta^2-1}d^2\underline{\kappa}_\perp$, leírva, β^2-1-et kiemelve:

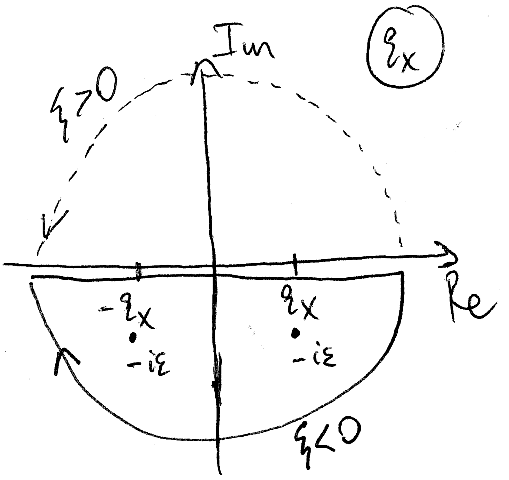
$$\underline{A}(\underline{x},t)=\frac{Q\mu}{(2\pi)^3}\underline{v}_0\int d\kappa_x\int d^2\underline{\kappa}_\perp'\,\frac{1}{\underline{\kappa}_\perp'^2-\kappa_x^2}\,e^{i[\sqrt{\beta^2-1}\,\underline{\kappa}_\perp'\underline{x}_\perp+\kappa_x\xi]}$$

$$\boxed{\underline{A}(\underline{x},t)=\frac{Q\mu}{(2\pi)^3}\underline{v}_0\int d\kappa_x\int d^2\underline{\kappa}_\perp'\,e^{i[\sqrt{\beta^2-1}\,\underline{\kappa}_\perp'\underline{x}_\perp+\kappa_x\xi]}\cdot\left(\frac{-1}{2|\underline{\kappa}_\perp'|}\right)\left(\frac{1}{|\underline{\kappa}_\perp'|+\kappa_x}-\frac{1}{\kappa_x-|\underline{\kappa}_\perp'|}\right)}$$

→ **Integrálás:**

Ha $\xi > 0$ → q_x-et a pozitív félsíkba tolom → exp lecsengés $q_x \to q_x + i\varepsilon$

Ha $\xi < 0$ → alsó félsíkba tolom : $\boxed{\pm q_x \to \pm q - i\varepsilon}$



Ezzel a q_x-re integrálás

$$\boxed{\begin{aligned}\int dq_x e^{iq_x\xi}\left(\frac{1}{q_x+|\underline{q}'_\perp|}-\frac{1}{q_x-|\underline{q}'_\perp|}\right)\frac{1}{-2|\underline{q}'_\perp|} &= \\ = -2\pi i \frac{1}{-2|\underline{q}'_\perp|}\left(e^{-i|\underline{q}'_\perp|\xi}-e^{i|\underline{q}'_\perp|\xi}\right)\end{aligned}}$$

Ily módon:

$$A(x,\underline{x}_\perp,t) = \frac{\mu Q}{(2\pi)^3}\underline{v}_0(-\cancel{2}\pi i)\int d^2 q'_\perp\left(\frac{1}{\cancel{2}|\underline{q}'_\perp|}\right)\overbrace{\left(e^{-i|\underline{q}'_\perp|\xi}-e^{i|\underline{q}'_\perp|\xi}\right)}^{2i\sin()}\cdot e^{i\sqrt{\beta^2-1}\,\underline{q}'_\perp\underline{x}_\perp}$$

Legyen $|\underline{x}_\perp| = \varrho$, így $\underline{q}'_\perp \underline{x}_\perp = \varrho\cos\varphi \cdot q'_\perp$, így a $d^2 q'_\perp$ [illegible]:

$$\underline{A}(x,\underline{x}_\perp,t) = -\frac{\mu Q}{(2\pi)^2}\underline{v}_0\int_0^\infty d q'_\perp \sin(q'_\perp\xi)\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i\sqrt{\beta^2-1}\,q'_\perp\varrho\cos\varphi}}_{\text{0. Bessel-fgv}\;\to\; 2\pi J_0(\sqrt{\beta^2-1}\,q'_\perp\varrho)}$$

$$\boxed{A(x,\underline{x}_\perp,t) = \frac{\mu Q}{2\pi}\underline{v}_0\int_0^\infty dq'_\perp \sin q'_\perp|\xi|\; J_0(\sqrt{\beta^2-1}\,q'_\perp\varrho)}$$

Felütjük a Bronstejn-t, abból idegesen kinézzük:

$$\int_0^\infty dt\; J_0(at)\sin bt = \begin{cases} 0 & 0 \le b \le a \\ (b^2-a^2)^{-1/2} & b > a > 0 \end{cases}$$

Szótábla: $t \to q'_\perp$
$a \to \sqrt{\beta^2-1}\,\varrho$
$b \to |\xi|$

$\Longrightarrow$

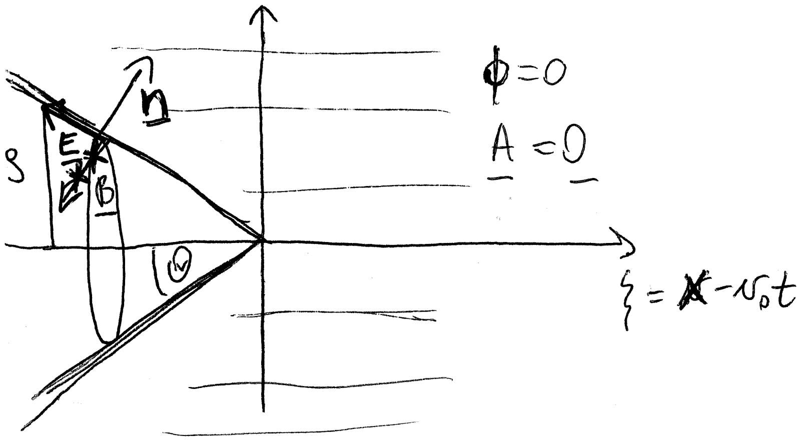
$$\boxed{\underline{A}(x,\underline{x}_\perp,t)=\begin{cases}0 & ,\text{ ha } \sqrt{\beta^2-1}\,\rho > v_0t-x\\ \dfrac{\frac{Q\mu}{2\pi}\cancel{4}\underline{v}_0}{\left[(x-v_0t)^2-(\beta^2-1)\rho^2\right]^{1/2}} & ,\text{ ha } \sqrt{\beta^2-1}\,\rho < v_0t-x\end{cases}}$$

⇓

Mach-kúp:

↳ nyílásszög:

$$\boxed{\operatorname{tg}\Theta=\frac{\rho_{\text{határ}}}{|\xi|}=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}}$$



→ Az ellipszis metszetek méréséből ⇒ Cserenkov-detektor

↳ kúp rekonstruálható

→ részecske sebessége és iránya meghatározható

→ $\underline{A}$ a kúpon szinguláris, ezért $\varepsilon(\omega)$ kisimítja

→ Térerősségek:

Legyen $R=\left[(x-v_0t)^2-(\beta^2-1)\rho\right]^{1/2}$

$$\boxed{\underline{B}=\operatorname{rot}\underline{A}=\underline{v}_0\times\frac{\mu Q}{2\pi}\underline{\nabla}\frac{1}{R}}$$

ebből csak ⊥-es komponens ad járulékot.

$$\boxed{\left(\underline{\nabla}\frac{1}{R}\right)_\perp=\frac{\underline{x}_\perp}{R^3}(\beta^2-1)}$$

⇒ ~~ϕ~~ $\underline{B}$ merőleges a palástra.

$$\boxed{\underline{E}=-\underline{\nabla}\phi-\dot{\underline{A}}=-\underline{\nabla}\phi+\underline{\beta}(\underline{\beta}\underline{\nabla})\phi}$$

, mivel $\underline{A}=\frac{1}{c^2}\underline{v}_0\phi=\frac{\underline{\beta}}{c}\phi$

↳ $\boxed{\underline{n}\underline{E}=0}$ → $\underline{E}$ merőleges a palástra, $\boxed{\underline{B}\underline{E}=0}$ ⇒ $\underline{B}\perp\underline{E}$, ahol használtuk, hogy:

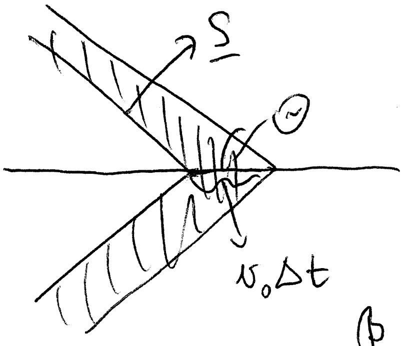
$$\underline{A} = \frac{1}{v_f^2}\underline{v}_0\phi = \frac{1}{v_f}\underline{\beta}\phi \Rightarrow \boxed{\underline{B} = \frac{1}{v_f}\underline{\beta}\times\underline{\nabla}\phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{n} \perp \underline{E} \perp \underline{B} \perp \underline{n}}$$

→ <u>Poynting-vektor a paláston:</u>

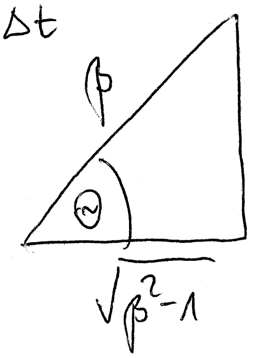
$\underline{S} \sim \underline{n}$ a paláston $\qquad \underline{E}\times\underline{B} \parallel \underline{n}$

↳ csak irány, közelítés miatt értéke szinguláris



Energia terjedés sebessége:

$$\boxed{|\underline{v}_E| = v_0 \sin\Theta}$$



$$\Rightarrow \boxed{|\underline{v}_E| = \frac{v_0}{\beta} = v_f}$$

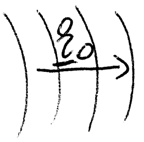
12. Tétel: Elektromágneses hullám szórása szabad töltésen: Thomson-szórás:

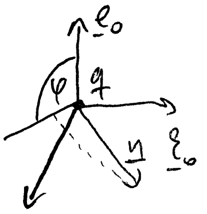
→ Nem relativisztikus eset.

→ Beeső síkhullám határozott frekvenciájú legyen

Legyen: $k_0 = \frac{\omega}{c}$, $\underline{k}_0 = k_0 \underline{n}_0$, $\underline{e}_0 \underline{n}_0 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{E}_{be}(\underline{x},t) &= \underline{e}_0 E_0 e^{i(\underline{k}_0\underline{x} - \omega t)} \\ \underline{B}_{be}(\underline{x},t) &= \frac{1}{c}\underline{n}_0 \times \underline{E}_{be} \end{aligned}}$$





→ Nézzük csak az E teret:

$$\boxed{\begin{aligned} m\dot{\underline{v}} &= q\,\underline{E}_{be}(\underline{x},t) \\ &\downarrow \\ \dot{\underline{\beta}} &= \frac{q}{mc}\underline{e}_0 E_0 e^{i(\underline{k}_0\underline{x} - \omega t)} \end{aligned}}$$

$\beta = \frac{v}{c}$ (láttuk)

Vegyünk hosszúhullámú közelítést: $|\Delta x| << \lambda$

→ töltés $\underline{e}_0$ irányban rezgőmozgást végez

$$\boxed{\underline{E}_{szórt} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\,\frac{\underline{n}\times(\underline{n}\times\dot{\underline{\beta}})}{r}} \longrightarrow \text{Liénard-Wiechert-ből}$$

→ Periódusidő alatt adott térszögbe kisugárzott teljesítmény:

$$\frac{d\overline{P}^T_{szórt}}{d\Omega} = \frac{1}{\mu_0 c} r^2 \left|\underline{E}_{szórt}(\underline{x},t)\right|^2 = \frac{1}{\mu_0 c}\,\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 c^2}\cdot\frac{q^2}{m^2c^2}\cdot E_0^2\cdot\frac{1}{2}\left[\underline{n}\times(\underline{n}\times\underline{e}_0)\right]^2 =$$

$$\boxed{\frac{d\overline{P}^T_{szórt}}{d\Omega} = \frac{q^4}{32\pi^2\varepsilon_0 m^2 c^3}E_0^2\left(1-(\underline{n}\underline{e}_0)^2\right)}$$

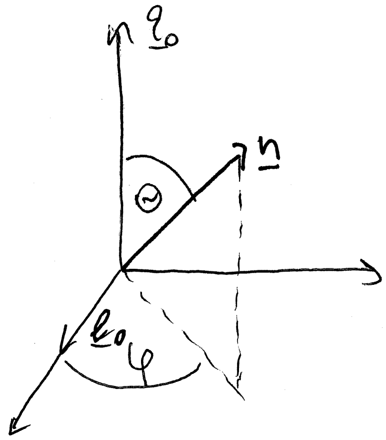
$\underline{n}\underline{e}_0 = \sin\vartheta\cos\varphi$

→ Bejövő teljesítmény:

$$\boxed{\overline{P}^T_{be} = \frac{1}{2\mu_0 c}E_0^2}$$

→ Thomson-féle-differenciális hatáskeresztmetszet:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}^{Th} = \frac{1}{\overline{P}^{T}_{be}} \cdot \frac{d\overline{P}^{T}_{szórt}}{d\Omega} = \frac{q^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 c^4 m^2}\left(1-\sin^2\Theta \cos^2\varphi\right)}$$



→ Totális hatáskeresztmetszet:

$$\boxed{\sigma^{tot}_{Th} = \underbrace{\int d\Omega\left(1-\sin^2\Theta\cos^2\varphi\right)}_{\frac{8\pi}{3}} \cdot \left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2 = \frac{8\pi r_0^2}{3}}$$, ahol

finomszerkezeti állandó

$$\boxed{r_0 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} = \frac{\alpha q}{mc^2}}$$

klasszikus elektronsugár, ha $q=e$ és $m=m_e$

r_0 alatt meghiúsul a klasszikus modell.

13. Tétel: Sugárzási visszahatás a töltés mozgására:

→ Láttuk a Larmor-képletet: $\boxed{P_{sug}(t) = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dot{\underline{v}}^2}$

→ Írjuk fel az energiamegmaradást → munkatétel:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\underline{v}^2\right) = \underline{F}_{ext}\underline{v} - \underline{F}_{sug}\underline{v}}$$

↳ ez a sugárzási visszaható erő

$$\boxed{\underline{F}_{sug}\underline{v} = P_{sug} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\frac{d}{dt}(\underline{v}\dot{\underline{v}}) - \underline{v}\ddot{\underline{v}}\right]}$$

, ahol teljes deriválttá alakítottuk.

Legyen $\boxed{m\tau = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}}$, így → Energiamegváltozás karakterisztikus ideje és klasszikus elektronsugáron való áthaladáshoz szükséges idő $\boxed{\tau = \frac{2r_0}{3c}}$

$$\frac{d}{dt}\left[E_{kin} + m\tau\underbrace{\underline{v}\dot{\underline{v}}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underline{v}^2}\right] = \underline{F}_{ext}\underline{v} + m\tau\ddot{\underline{v}}\underline{v}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[E_{kin} + \tau\cancel{\frac{dE_{kin}}{dt}}\right] = \left[\underline{F}_{ext} + m\tau\ddot{\underline{v}}\right]\underline{v}}$$

ameddig $\left|\tau\frac{dE_{kin}}{dt}\frac{1}{E_{kin}}\right| \ll 1$, addig elhanyagolhatjuk a bal oldalon lévő második tagot.

Ezt megtehetjük, mivel $\tau = r_0\frac{2}{3c} \approx 10^{-20}$ s, ezzel:

$\boxed{\underline{F}_{sug} = -m\tau\ddot{\underline{v}}}$. Így $m\dot{\underline{v}} = \underline{F}_{ext} - \underline{F}_{sug}$

↓

$$\boxed{m(\dot{\underline{v}} - \tau\ddot{\underline{v}}) = \underline{F}_{ext}}$$

Vegyük $\underline{F_{ext}=0}$ esetet, ekkor

$$\boxed{\underline{\dot{v}}(t)=\underline{\dot{v}}_0\, e^{\frac{t}{\tau}}}$$ → Öngyorsító elektron?! WTF

És ilyet nem akarunk, konstruálunk integro-diffegyet:

Legyen $\boxed{\underline{\dot{v}}(t)=\underline{u}(t)\, e^{\frac{t}{\tau}}}$, így

$$\underline{\dot{v}}-\tau\underline{\ddot{v}}=-\tau e^{\frac{t}{\tau}}\underline{\dot{u}}$$

$$\boxed{m\underline{\dot{u}}=-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}F_{ext}(t)}$$

$$\boxed{\underline{u}(t)=-\frac{1}{m\tau}\int_{t_i}^{t}dt'\, e^{-\frac{t'}{\tau}}F_{ext}(t')}$$

Így: $$\boxed{\underline{\dot{v}}(t)=-\frac{1}{m\tau}e^{\frac{t}{\tau}}\int_{t_i}^{t}dt'\, e^{-\frac{t'}{\tau}}F_{ext}(t')}$$

→ Ez már nem száll el, viszont időbeli memóriája van.

It hal meg a klasszikus modell.

Legyen $\boxed{s=\frac{t'-t}{\tau}}$, $ds=\frac{dt'}{\tau}$, írjuk be:

$$\underline{\dot{v}}(t)=\frac{-1}{m}\int_{s_i}^{0}ds\, e^{-s}F_{ext}(t+s\tau)$$

, ezzel $s_i=\infty$-nel és $\tau\to0$ esetben a Newton-egyenletet kapjuk.

Fejtsünk sorba:

$$\boxed{\underline{\dot{v}}(t)=\frac{1}{m}\int_0^{\infty}ds\, e^{-s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^nF_{ext}}{dt^n}\frac{1}{n!}(s\tau)^n}$$

Felhasználva, hogy $\int_0^{\infty}e^{-s}s^n=n!$ kapjuk:

$$\boxed{\dot{\underline{v}}(t) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n F_{ext}}{dt^n}\tau^n \xrightarrow{\tau \to 0} \frac{F_{ext}}{m}}$$

Akauzalitási probléma:

$$m\dot{\underline{v}} = \int_0^\infty ds\, e^{-s} F_{ext}(t+s\tau)$$ ezt láttuk.

Legyen $F_{ext} = \begin{cases} 0, & t<0 \\ F_0, & t>0 \end{cases}$, akkor

ha $t>0$ $\boxed{m\dot{\underline{v}} = F_0\int_0^\infty ds\, e^{-s} = F_0}$ → ez jó

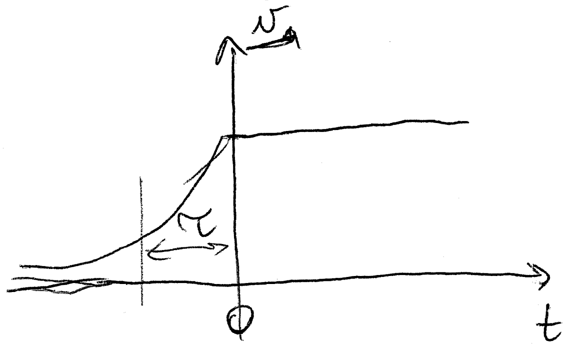
ha $t<0$, akkor baj van:

$-|t| + s\tau > 0$ esetén $s > \frac{|t|}{\tau}$, így

$$\boxed{m\dot{\underline{v}} = F_0\int_{\frac{|t|}{\tau}}^{\infty} ds\, e^{-s} = F_0 e^{-\frac{|t|}{\tau}} = F_0 e^{\frac{t}{\tau}}}$$

→ exp felcsengés

és rendszer érzi, hogy le akarjuk kapcsolni, 10^{-24} s-el előbb elkezd indulni



→ Nagy időskálán jó csak a közelítés.

→ Klasszikus, természetes vonalszélesség:

→ kapcsoljunk a fenti rendszerre egy harmonikus oszcillátort:

$\boxed{F_{ext} = -m\omega_0^2 \underline{x}}$, ezzel:

$$\boxed{\ddot{\underline{x}}(t) = -\omega_0^2 \int_0^\infty \underline{x}(t+s\tau)\, e^{-s} ds}$$

→ ansatz: $\underline{x}(t) = \underline{x}_0 e^{-\alpha t}$, beírjuk:

$$\boxed{\alpha^2 \underline{x}_0 e^{-\alpha t} = -\omega_0^2 \underline{x}_0 e^{-\alpha t} \int_0^\infty e^{-s(1+\alpha\tau)} ds}$$

Ha $Re(1+\alpha\tau) > 0$, akkor integrálható. Fizikában mindig teljesül.

$$\alpha^2 \cancel{\underline{x}_0 e^{-\alpha t}} = -\omega_0^2 \cancel{\underline{x}_0 e^{-\alpha t}} \frac{1}{1+\alpha\tau}$$

$$\boxed{\alpha^3 \tau + \alpha^2 + \omega_0^2 = 0}$$

Ha $\tau = 0$ → $\boxed{\alpha = \pm i\omega_0}$ → harmonikus rezgőmozgás

Ha $\alpha\tau \ll 1$ (kicsi), akkor közelítés:

$\alpha^3 \tau \approx -\omega_0^2 \alpha \tau$ -t írok be

$$\alpha^2 + \omega_0^2 (1 - \alpha\tau) \cong 0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}\omega_0^2 \tau \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4}\omega_0^2 \tau^2}}$$

atomok esetében: $\omega_0^2 \tau^2 \sim 10^{-10}$:

$$\boxed{\alpha = \pm i(\omega_0 + \Delta\omega_0) + \frac{\Gamma}{2}}$$

ahol $\boxed{\Gamma = \omega_0^2 \tau}$ ~~[illegible]~~

$$\boxed{\Delta\omega_0 = -\frac{\omega_0^3 \tau^2}{2}}$$ ⇒ vonaleltolódás → Lamb-shift

Ezzel:

$$\boxed{x(t) = x_0 \underbrace{e^{-\frac{\Gamma}{2}t}}_{\text{fékezési hatás}} e^{\pm i(\omega_0 + \Delta\omega_0)t}}$$

A spektrum alakja:

$$\boxed{x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\, x(t) = \frac{x_0}{\alpha - i\omega}}$$

Rezgő dipól sugárzása: $\sim |x(\omega)|^2$

Sugárzási teljesítmény:

$$I(\omega) \sim \omega^4 |x(\omega)|^2 = \omega^4 d_0^2 \frac{1}{\left(\frac{\Pi}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_0 - \Delta\omega_0)^2}$$

$\rightarrow$ vonalszélesség: $\boxed{\Delta\omega \simeq \frac{\Pi}{2}}$

$$\underline{\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \sim 10^{-10}} \qquad \underline{|\omega - \omega_0 - \Delta\omega_0| \lesssim \frac{\Pi}{2} \text{ a mérési határunk.}}$$

14. Tétel: Az Abraham-Lorentz elektronmodell:

→ minden erőhatás EM-es, más nincs → egységes kölcsönhatás elképzelése

→ teljes impulzus: $\boxed{\underline{p}_{teljes} = \underline{p}_{EM}}$

$$\boxed{\frac{d\underline{p}_{teljes}}{dt} = \underline{0} = \int d^3x \left[\rho(\underline{x},t)\left(\underline{E}_{saját}(\underline{x},t) + \underline{E}_{külső}(\underline{x},t)\right) + \underline{j}(\underline{x},t) \times \left[\underline{B}_{saját}(\underline{x},t) + \underline{B}_{külső}(\underline{x},t)\right]\right]}$$

Newton-törvénye alapján:

$$\frac{d\underline{p}_{mech}}{dt} = \int d^3x \left[\rho(\underline{x},t)\underline{E}_e(\underline{x},t) + \underline{j}(\underline{x},t) \times \underline{B}_e(\underline{x},t)\right] =$$

$$= -\int d^3x \left[\rho(\underline{x},t)\underline{E}_s(\underline{x},t) + \underline{j}(\underline{x},t) \times \underline{B}_s(\underline{x},t)\right]$$

Vegyünk Lorentz-mértéket és relativisztikus esetet:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{E}_s = -\dot{\underline{A}}_s - \underline{\nabla}\phi_s \\ &\underline{B}_s = \underline{\nabla} \times \underline{A}_s \\ &\phi_s(\underline{x},t) = \int d^3x' \, \frac{\rho(\underline{x}',t-\frac{R}{c})}{R} \, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \\ &\underline{A}_s(\underline{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\underline{j}(\underline{x}',t-\frac{R}{c})}{R} \end{aligned}}$$

→ zárt rendszer

geometriailag kiterjedt töltéseloszlás

és fokozatosan kicsinyítem, amíg pont nem lesz

és mozgásegyenletet erre írom fel

$$\boxed{R = |\underline{x} - \underline{x}'| \sim a \rightarrow 0}$$

Tegyük a rendszert nyugalmi rendszerbe. Ezen kívül legyen a töltéseloszlás merev:

testben rögzített ←

$\boxed{\underline{j}(\underline{x},t) = \underline{v}(t)\rho(\underline{x})}$, ahol $\underline{v}$ a mozgás közös sebessége

Nyugalmi rendszer esetén $\boxed{\underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{j} = \underline{0}}$, ezzel:

$$\boxed{\frac{d\underline{p}_{mech}}{dt} = -\int d^3x \, \rho(\underline{x},t)\underline{E}_s(\underline{x},t) = \int d^3x \, \rho(\underline{x},t)\left(\underline{\nabla}_x\phi_s(\underline{x},t) + \dot{\underline{A}}_s(\underline{x},t)\right)}$$

→ Töltés közel pontszerű, így $\frac{R}{c} << t$ → kismértékű retardálás. Sorfejtünk:

$$\boxed{\frac{dP_{med}}{dt} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!c^n}\int d^3x\, \rho(\underline{x},t)\int d^3x' \frac{\partial^n}{\partial t^n}\Big[\underbrace{\rho(\underline{x}',t)\,\underline{\nabla}_x R^{n-1}}_{\nabla\phi\text{-ből}} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\underline{j}(\underline{x}',t)R^{n-1}}_{\dot{\underline{A}}\text{-ből}}\Big]}$$

Tagonként vizsgáljuk az R→0 -t:

merevségi feltétellel, saját erőhatásra ne mozduljon el

$n=0$: $\dot{\underline{j}}(\underline{x}',t) = \underline{0}$ csak ϕ-t nézek

$$\boxed{\underline{F}_\phi^{(0)} = \int d^3x\, \rho(\underline{x},t)\int d^3x' \rho(\underline{x}',t)\, \underline{\nabla}_x \frac{1}{R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \overset{\downarrow}{=} 0}$$

$n=1$: $$\boxed{\underline{F}_\phi^{(1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-1}{c}\int d^3x\, \rho(\underline{x},t)\int d^3x' \rho(\underline{x}',t)\, \underbrace{\underline{\nabla}_x R^0}_{0} = 0}$$

ϕ járuléka csak $n=2$-től indul. Toljuk le: $n'=n-2$, $\underline{A}$ változatlan.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dP_{mech}}{dt} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n'}}{n'!c^{n'+2}}\int d^3x\int d^3x'\, \rho(\underline{x},t)\, R^{n'-1}\cdot \\ &\cdot\Big[\underbrace{\frac{\partial^{n'+2}}{\partial t^{n'+2}}\rho(\underline{x}',t)}_{\frac{\partial^{n'+1}}{\partial t^{n'+1}}\left(-\underline{\nabla}_{x'}\underline{j}(\underline{x}',t)\right)}\cdot\frac{\underline{\nabla}_x R^{n'+1}}{(n'+1)(n'+2)R^{n'+1}} + \frac{\partial^{n'+1}}{\partial t^{n'+1}}\dot{\underline{j}}(\underline{x}',t)\Big]\end{aligned}}$$

töltésmegmaradás miatt

$\underline{\nabla}_x R^{n'+1} = (n'+1)R^{n}\hat{R} = (n'+1)R^{n-1}\underline{R}$, innentől $n'\to n$ jelölés:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dP_{mech}}{dt} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!c^{n+2}}\int d^3x\int d^3x'\, \rho(\underline{x},t)\, R^{n-1}\cdot \\ &\cdot\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}\Big[-\frac{1}{n+2}\underline{R}\left(\underline{\nabla}_{x'}\underline{j}(\underline{x}',t)\right) + \underline{j}(\underline{x}',t)\Big]\end{aligned}}$$

Parciális integrálás a második tagon:

$$-\int d^3x' R^{n-1} R_i \underline{\nabla}^l_{\underline{x}'} j_l(\underline{x}',t) = \int d^3x' \, j^l \underline{\nabla}^l_{\underline{x}'} (\underline{R} R^{n-1}) = -(n-1)\int d^3x' \underbrace{R^{n-3} R_l R_i j_l}_{\underline{R}(\underline{j}\underline{R})R^{n-3}} -$$

Felhasználva, hogy $R_i = x_i - x_i'$ és $\underline{\nabla}_{x'} R = \hat{\underline{R}}$:

$$-\int d^3x' R^{n-1} j_i(\underline{x}',t) \,,$$ így

$$\boxed{\frac{dP_{\text{mech}}}{dt} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,c^{n+2}}\int d^3x\int d^3x'\, \varrho(\underline{x},t)\, R^{n-1} \cdot \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}\left[\underline{j}(\underline{x}',t) - \frac{n-1}{n+2}\hat{\underline{R}}(\hat{\underline{R}}\,\underline{j}(\underline{x}',t)) - \frac{1}{n+2}\underline{j}(\underline{x}',t)\right]}$$

$$\varrho(\underline{x}')\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}\left[\frac{n+1}{n+2}\underline{v}(t) - \frac{n-1}{n+2}\underbrace{\hat{\underline{R}}(\hat{\underline{R}}\,\underline{v}(t))}_{\text{szögfüggő tag}}\right]$$

merev töltéseloszlás:

$$\underline{j}(\underline{x},t) = \varrho(\underline{x})\,\underline{v}(t)$$

→ szögfüggő részt bontsuk fel: $\boxed{\underline{v}\,\underline{e}_\perp = 0}$, így: $\boxed{\hat{\underline{R}} = \hat{\underline{v}}(\hat{\underline{R}}\hat{\underline{v}}) + \underline{e}_\perp(\underline{e}_\perp\hat{\underline{R}})}$

→ Geometriai szabadság → $\varrho(\underline{x})$ legyen gömbszimmetrikus:

$$\int d\Omega_{\hat{R}}\, \varrho(|\underline{x}'|)\, \underline{e}_\perp(\underline{e}_\perp\hat{\underline{R}})(\hat{\underline{R}}\,\underline{v}) = 0$$, mert páratlan

$$\int d\Omega_{\hat{R}}\, \varrho(|\underline{x}'|)\, \underline{v}(\hat{\underline{R}}\hat{\underline{v}})(\hat{\underline{R}}\hat{\underline{v}}) = \underline{v}\,\varrho(|\underline{x}'|)\int d\Omega_{\hat{R}}(\hat{\underline{R}}\hat{\underline{v}})^2 = \frac{4\pi}{\textcircled{3}}\varrho(|\underline{x}'|)\,\underline{v}$$

Beírva:

$$\boxed{\frac{dP_{\text{mech}}}{dt} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,c^{n+2}}\int d^3x\int d^3x'\, \varrho(\underline{x})\varrho(\underline{x}')R^{n-1} \cdot \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}\underline{v}(t)\overbrace{\left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{3}\frac{n-1}{n+2}\right)}^{2/3}}$$

Így már vizsgálhatjuk az $R \to 0$ limeszt, tagonként:

$$n=0: \quad \boxed{\frac{dP_{mech}^{(0)}}{dt} = \frac{1}{c^2}\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x\,\rho(\underline{x})\int d^3x'\,\rho(\underline{x}')\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}}_{\text{saját Coulomb energia kétszerese}} \cdot \dot{\underline{v}}\,\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dP_{mech}^{(0)}}{dt} = \frac{4}{3}\frac{U_{elsztat}}{c^2}\dot{\underline{v}}$$

Nyugalmi energia: $U_{elsztat} = E_{nyug} = m_{mech}c^2$

$$\boxed{\frac{dP_{mech}^{(0)}}{dt} = \frac{4}{3}m_{mech}\dot{\underline{v}}}$$

→ majdnem Newton II.

→ nem elég csak EM-kh.

$$n=1: \quad \boxed{\frac{dP_{mech}^{(1)}}{dt} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-1)}{c^3}\ddot{\underline{v}}\underbrace{\int d^3x\,\rho(\underline{x})\int d^3x'\,\rho(\underline{x}')}_{e^2} \cdot \frac{2}{3}R^0 = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\underline{v}}}$$

↳ sugárzási visszahatás → pontosan megkaptuk.

$$n \geq 2: \sim \boxed{\frac{1}{c^{n+2}}e^2 \cdot R^{n-1} \xrightarrow{R} 0 \quad \downarrow 0} \rightarrow \underline{\text{ezek eltűnnek.}}$$

$$\text{Így:} \quad \boxed{\frac{dP_{mech}}{dt} = \underline{F}_{ext} = \frac{4}{3}m\dot{\underline{v}} - \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\underline{v}}}$$