Bevezető analízis 1. gyakorlat

2018/2019. 1. félév

2. csoport, szerda 16–18

1. gyakorlat (szeptember 12.)

- Gyakorlati tudnivalók megbeszélése: elérhetőség, segédanyag, ajánlott irodalom, ZH időpontok, tematika.

- Bemelegítő logikai feladat: betű-szám kártyák (Mérő László: Észjárások).

- Függvény és logika: közösen megbeszéltük, hogy a 3.3. feladat első kijelentése mit jelent, példaként megnéztük, hogy az $f(x) = x$ függvényre teljesül a kijelentés, megbeszéltük, hogy mit kell megadni, ha ezt bizonyítani szeretnénk (például x-hez $y = x + 1$-et adtuk meg). Megnéztük, hogy az $f(x) = |x|$ függvényre is teljesül a kijelentés (azonban itt $y = x + 1$ nem mindig jó, helyette például $y = |x| + 1$).

- Monotonitás: közösen definiáltuk, hogy mit jelent, hogy egy f függvény az I intervallumon monoton nő/szigorúan monoton nő. HF otthon átgondolni, hogy mit jelent a monoton csökkenés/szigorúan monoton csökkenés. Beláttuk, hogy az $f(x) = x$ függvény monoton nő. Megbeszéltük, hogy az $f(x) = |x|$ függvény nem monoton nő és ehhez mit kell megadni (például $-3 < -2$, de $f(-3) \geq f(-2)$.)

- Szélsőérték: közösen definiáltuk, hogy mit jelent, hogy egy f függvénynek M a maximuma. HF meggondolni, hogy mit jelent, hogy M a minimum. Beláttuk, hogy az $f(x) = |x|$ függvénynek van minimuma és nincs maximuma (amely igazolásához megmutattuk, hogy a függvény tetszőleges függvényértéknél nagyobb értéket felvesz, azaz $f(x)$-hez megadunk $f(x_0)$-t, amelyre $f(x_0) > f(x)$, legyen pēldul $x_0 = |x|+1$). Megbeszéltük, hogy hogyan módosítsuk az $f(x) = |x|$ függvényt úgy, hogy ne legyen minimuma és maximuma sem, legyen például $f(0) = 3$ és $f(x) = |x|$, ha $x \neq 0$. HF megmutatni, hogy utóbbi függvénynek nincs minimuma és maximuma.

- HF: 3.18., 3.3. feladat második kijelentése mit jelent és példát adni (be is látni, hogy erre a függvényre teljesül a kijelentés), 1.12., 2.15., 3.13–16., 5.10., 5.16.

- Jegyzet: 3. fejezet 1–5. szakaszok (függvényekkel kapcsolatos fogalmak, elemi függvények).

2. gyakorlat (szeptember 19.)

- HF-ok megbeszélése: megbeszéltük a 3.13–3.16. feladatokat. Beláttuk, hogy a 3.22. feladatban szereplő függvénynek nincs minimuma. Továbbá azt is beláttuk, hogy a konstans függvényre teljesül a 3.16. feladatban szereplő tulajdonság. Felhívtam a figyelmet arra, hogy az ilyen jellegű feladatoknál önmagában egy példa megadása nem elég, meg kell mutatni, hogy az adott példa rendelkezik a kívánt tulajdonsággal (sok esetben inkább ez a nehéz és nem a példa megadása). Átgondoltuk, hogy a 3.18. feladatra egy jó példa a 3.22. feladatban szereplő függvény mínusz egyszerese, ennek igazolását HF-nak adtam. Megnéztük az 5.10. és 5.16. feladatokat, ahol hangsúlyoztam, hogy a hamis állításhoz elég egyetlen x-et megadni, amelyre nem teljesül az állítás. Az 1.12. feladatnál beláttuk, hogy az első kijelentésből nem következik a második kijelentés, erre megadtunk rajzon egy ellenpéldát; továbbá megmutattuk, hogy viszont a második kijelentésből következik az első kijelentés és megbeszéltük, hogy ennek igazolásához mit kell megmutatni. A 2.15. egyenlőtlenség megoldására 3 módszert is néztünk. Az 1. megoldás során nullára rendeztük az egyenlőtlenséget és így a számláló és nevező előjelét vizsgáltuk. Megbeszéltük, hogy két eset lehetséges és a megoldáshalmazok uniója adja az összes megoldást. A 2. megoldási módszer az esetszétválasztás volt az $x+2$ előjele alapján, ugyanis ezen kifejezéssel való beszorzáskor a kifejezés előjelét figyelembe kell venni, itt is a két eset megoldáshalmazainak uniója adja az összes megoldást. A 3. módszer során grafikusan ábrázoltuk az egyenlőtlenség két oldalát, fontos, hogy a metszéspontokat nem az ábráról olvassuk le.

- Abszolútértékes egyenlőtlenség: megoldottuk a 3.277. feladatot először az abszolútérték függvény definíciója szerinti esetszétválasztással, majd figyelembe véve, hogy $|a| > 5$ azt jelenti, hogy $a > 5$ vagy $a < -5$ és így a helyére beírva az eredeti kifejezést kapjuk a megoldást. Átgondoltuk azt is, hogy a 3.279. feladat kapcsán $|a| < 4$ azt jelenti, hogy $-4 < a < 4$, amely segítségével könnyen adódik a feladat megoldása (HF).

- HF: 1.5–11., 2.17., 3.60., 3.62., 3.69., 3.70.

- Jegyzet: 2.2 (egyenlőtlenségek), 3.2 (függvények tulajdonságai, páros és páratlan függvények).

- Szorgalmi: 1.41.

3. gyakorlat (szeptember 26.)

- HF-ok megbeszélése: részleteztem egy megoldást a 2.17. abszolútértékes egyenlőtlenségre, felhívtam a figyelmet, hogy mindig fontos indokolni, hogy miért hajtottunk végre ekvivalens átalakításokat, ügyeljünk a különböző esetekre, továbbá hangsúlyoztam, hogy ha a különböző esetek „vagy” szócskával vannak összekapcsolva, akkor a két megoldáshalmaz unióját kell venni, viszont ha „és” szócskával, akkor a metszetüket. Megbeszéltük, hogy mit jelent, hogy egy függvény páros vagy páratlan. Megbeszéltük, hogy a 3.60. feladatban szereplő függvény nem páros, erre az $x = 1$ ellenpéldát hoztuk, amely szerint $f(1) = 1 \neq -1 = f(-1)$. A 3.62. feladatban szereplő $x^3 + x^4$ függvényről beláttuk, hogy se nem páros, se nem páratlan, ellenpélda mindkét esetben az $x = 1$ volt. Megbeszéltük, hogy a 3.69. feladatban nem következik, hogy a függvény páros, ellenpéldaként az $f(x) = x$, ha $x \neq 5$ és $f(x) = -5$, ha $x = 5$ példát hoztuk. A 3.70. feladatot is megbeszéltük, amely szerint $f(5) \neq f(-5)$ kijelentésből következik, hogy az f függvény nem páros, az $x = 5$ ellenpéldát hoztuk. Megbeszéltük, hogy az 1.8. feladat igaz, ugyanis nem létezik 2-re végződő négyszetszám és ha az állítás hamis lenne, akkor tudnánk mutatni egy 2-re végződő négyszetszámot, ami nem páratlan, de mivel nem tudunk ilyet mutatni, ezért az állítás igaz. Megbeszéltük, hogy hasonló indoklás miatt igaz az 1.11. feladat is. Végül megbeszéltük, hogy az 1.9. feladat is igaz.

- Egész és tört rész: megbeszéltük a definíciókat és megoldottuk a 3.176–183. feladatokat. Felhívtam a figyelmet, hogy a negatív számok egész és tört részénél vigyázni kell.
- Grafikon: felrajzoltuk az egész rész függvény grafikonját és megmutattuk, hogy a függvény nem páros, ellenpéldaként a kedvenc $x = 1$ ellenpéldát hoztuk. Végül beláttuk, hogy a függvénynek nincs maximuma.
- HF: 1.34. (vagy), 1.37. (és), 3.185., 3.188., 5.51., 5.52., 3.6., 3.7.
- Gyakorlás (be lehet adni, szívesen kijavítom): 3.267.
- Jegyzet: 3.6. (szakaszonként megadott függvények).
- Szorgalmi: 3.146.

4. gyakorlat (október 3.)

- HF-ok megbeszélése: megbeszéltük, hogy az 5.51. feladat igaz, ugyanis ha f páros, akkor tetszőleges x esetén (f az egész számegyenesen értelmezett függvény) $f(x) = f(-x)$ teljesül, tehát például $x = 1$ esetén $f(1) = f(-1)$. Mivel $-1 < 1$, azonban $f(1) = f(-1)$, tehát $f(-1) \not< f(1)$ és $f(-1) \not> f(1)$. Az 5.51. feladat eredményét felhasználva beláttuk, hogy az 5.52. feladat is igaz, ugyanis ha feltesszük, hogy f szigorúan monoton és indirekt feltételezzük, hogy páros, akkor az 5.51. feladat miatt a függvény nem lehet szigorúan monoton, ami ellentmondás. Meggondoltuk, hogy a 3.6. feladat nem igaz. Ehhez először megmutattuk, hogy két szigorúan monoton növő függvény összege szigorúan monoton növő, másodszor pedig beláttuk azt, hogy nem lehet egy függvény egyszerre szigorúan monoton növő és csökkenő is. Az 1.37. feladat kapcsán felelevenítettük, hogy „és” kötőszóval összekapcsolt tagmondatokból álló kijelentés akkor igaz, ha mindkét tagmondat igaz és akkor hamis, ha legalább az egyik tagmondat hamis. Észrevettük és beláttuk, hogy az x^2 függvény nem monoton az egész számegyenesen, emiatt a másik tagmondat vizsgálata nélkül is elmondható, hogy az állítás hamis. Az. 1.34. feladatban hasonlóan megbeszéltük, hogy „vagy” kötőszóval összekapcsolt tagmondatokból álló kijelentés akkor igaz, ha legalább egyik tagmondat igaz és hamis, ha mindkettő tagmondat hamis. Átgondoltuk, hogy tudunk mutatni olyan függvényt, amelyre mindkét tagmondat hamis lesz, például $f(x) = (x-1)^2$.

- Logika: közösen megoldottuk az 1.17. feladatot. Arra jutottunk, hogy „ha alma, akkor körte” típusú kijelentések tagadása „alma és nem körte”.

- Periodikus függvények: megbeszéltük, hogy mi a periodikus függvény definíciója, átgondoltuk, hogy a $p \neq 0$ feltétel miért lényeges. Közösen megoldottuk a 3.107., 3.102., 3.104. feladatokat.

- HF: 1.25., 3.84., 3.85., 3.98/b., 3.109., 5.24., 5.27., 3.95. feladat első állításából következik-e, hogy f periodikus.

- Jegyzet: 3.2. (periodikus függvények), 3. (műveletek függvényekkel, kompozíció).

- Szorgalmi: 1.42.

5. gyakorlat (október 10.)

- HF-ok megbeszélése: az 1.25. feladat kapcsán felhívtam a figyelmet arra, hogy matematikában a „vagy” mindig megengedő. Megbeszéltük, hogy a b) kijelentés miatt az a) és c) kijelentés is egyszerűbb alakra hozható, így az a) kijelentés felhasználásával a c) kijelentésből következik a feladat állítása. A 3.84. és 3.85. feladatok hamisnak bizonyulnak, mindkettőre ugyanazt az ellenpéldát hoztuk, nevezetesen $f(x) = x + x^2$ függvényt a kedvenc $x = 1$ pontunkban. A 3.109. feladat kapcsán először igazoltuk, hogy az $\{x\}$ tört rész függvénynek periódusa $p = 1$. Ehhez a definíció alapján azt kellett megmutatnunk, hogy $\{x + 1\} = \{x\}$ teljesül tetszőleges x esetén, amely a tört rész definíciója alapján pontosan azt jelenti, hogy $[x+1] = [x]$ tetszőleges x esetén. Utóbbi állítást igazoltuk a definíció alapján. Ezután megsejtettük, hogy a feladatban szereplő függvénynek is periódusa $p = 1$ és ezt meg is mutattuk. Utóbbi feladat kapcsán felelevenítettük, hogy mit jelent két függvény kompozíciója vagy más néven összetett függvénye, erre egy példát is néztünk. A 3.95. feladatban beláttuk, hogy az első kijelentésből nem következik, hogy az f függvény periodikus, erre ellenpélda az $f(x) = x^2$, ha $x \neq 0$ és $f(0) = 1$. Megmutattuk, hogy erre a függvényre teljesül az első kijelentés ($x \neq 0$ esetén $p = -2x$ jó és $x = 0$ esetén $p = 1$ jó), viszont a függvény nem periodikus, amelyet úgy indokoltunk, hogy a függvény az 1 értéket csak három pontban veszi fel, azonban egy periodikus függvény minden függvényértéket végtelen sok pontban vesz fel. A feladat elején azt is meggondoltuk, hogy az $f(x) = x^2$ függvény miért nem jó ($x = 0$-hoz nem tudunk p-t mondani, amivel az első kijelentés teljesülne). A 3.98/b. feladatban megsejtettük, hogy nincs ilyen függvény, ugyanis ha egy függvény periódusa p, akkor minden $k \cdot p$ is periódusa $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ esetén. Utóbbi állítást beláttuk $k = 2$ esetén.

6. gyakorlat (október 17.)

- 1. ZH.

7. gyakorlat (november 7.)

- Injektivitás: megfogalmaztuk az injektivitás definícióját (az értelmezési tartomány minden x, y elemére igaz, hogy ha $x \neq y$, akkor $f(x) \neq f(y)$; ezzel egyenértékű másik definíció, hogy az értelmezési tartomány minden x, y elemére igaz, hogy ha $f(x) = f(y)$, akkor $x = y$). Példának megnéztük az $f(x) = x^2$ függvényt, amelyről beláttuk, hogy a számegyenesen nem injektív, ugyanis például -1 és 1 is eleme az értelmezési tartománynak és $f(-1) = f(1)$, azonban $-1 \neq 1$. A pozitív számok halmazán viszont már injektív a függvény, ezt definíció szerint láttuk be.

- Inverz: megbeszéltük, hogy ha egy f függvény injektív, akkor van inverze, ezt jelölje f^{-1}. Az inverz legyen értelmezve f értékkészletén és legyen $f^{-1}(x) = y$, amelyre $f(x) = y$. Megbeszéltük, hogy $f^{-1}\colon R(f) \to D(f)$. Példának az $f(x) = x^2$ függvény inverzét adtuk meg a $[0, \infty)$ félegyenesen. Ezt úgy tettük, hogy formálisan az $y = f(x) = x^2$ egyenletből fejeztük ki az x-et, erre $x = \pm\sqrt{y}$ adódott. Ez két függvényt határoz meg, az előjelet konkrét érték segítségével tudjuk meghatározni. Megoldottuk a 3.129., 3.128. feladatokat.

- Racionális, irracionális számok: megbeszéltük a racionális szám fogalmát (előáll két egész szám hányadosaként). Megnéztük az 2.3/a feladatot, ahol indirekt okoskodtunk.

- HF: 3.130., 3.131., 3.141., 3.142., 2.8., 2.9., 2.11., 5.43.

- Jegyzet: 2. fejezet 1. szakasz (rac, irrac számok), 3. fejezet 9. szakasz (inverz).

- Szorgalmi: 1.43.

8. gyakorlat (november 14.)

- 1. ZH megbeszélése.

- Függvények minimuma, maximuma: megoldottuk a 3.36. feladatot, ahol megjegyeztem, hogy a függvényben célszerű teljes négyzetté alakítást végezni, ugyanis ebből az alakból könnyen leolvasható, hogy van minimuma és ezt hol veszi fel és mennyi az értéke. A függvénynek maximuma nincs, ezt elfogadjuk az ábra alapján (az 1. ZH anyagában foglalkoztunk ilyenekkel). Ezután megoldottuk a 3.38. feladatot, ahol szintén teljes négyzetté alakítással igazoltuk, hogy az egész számegyenesen hol van a függvénynek minimuma, azonban mivel intervallumon értelmezett függvényről van szó, így a szélsőértékhely-jelöltek közé az intervallum végpontjait is bele kell venni és ezen jelöltek közül egyszerű behelyettesítéssel állapíthatjuk meg a függvény minimumát és maximumát.

- Számtani és mértani közepek: bevezettük két szám számtani és mértani közepét, megbeszéltük a közepek közötti kapcsolatot. Ezután a 2.30. feladatot oldottuk meg kétféle módszerrel, először másodfokú függvények segítségével, másodszor pedig a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséggel. Megoldottuk a 2.34. feladatot először ekvivalens átalakításokkal, majd a közepek közötti egyenlőtlenséggel.
- HF: 3.39., 2.37., 2.38., 2.42., 5.71., 5.73.
- Jegyzet: 2. fejezet 3. és 4. szakasz (nevezetes közepek), 3. fejezet 8. szakasz (másodfokú függvény).
- Szorgalmi: 2.40.

9. gyakorlat (november 21.)

- RöpZH.
- HF-ok megbeszélése: megoldottuk a 2.37. feladatot a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség segítségével. A 2.38. feladatnál célszerű volt azt észrevenni, hogy ezen függvény az előző feladatban lévő függvényből 1 hozzáadásával adódott, ebből egyszerűen kihoztuk a függvény legkisebb értékét és azt, hogy ezt melyik pontban veszi fel. A 2.42. feladatban a kulcs gondolat az volt, hogy célszerű a területet egyetlen ismeretlen függvényként felírni, tehát az egyik oldal és a kerület segítségével. Így egy másodfokú függvényt kapunk, amit már tudunk vizsgálni szélsőérték szempontjából. Egy másik lehetséges megoldás, ha alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget.
- Egyenlőtlenségek: megbeszéltük a tranzitivitás, szorzás és hozzáadás szabályait. Ezután a kiegészítő feladatsorról oldottuk meg a 4, 5 feladatokat. Felhívtam a figyelmet arra, hogy ha valami nem igaz, akkor elég egyetlen ellenpéldát megadni, ha viszont igaz, akkor a tranzitivitás, szorzás és hozzáadás szabályok felhasználásával kell igazolni az állítást. Önálló munka során a 6, 7, 20 és 21 feladatokkal foglalkoztunk, amiket óra végén megbeszéltünk a táblánál.
- HF: Kiegészítő feladatsorról 10, 11, 14, 15 és 2.19., 1.31., 1.32., 1.33., 5.63., 5.64.
- Szorgalmi: tegyük fel, hogy $a < b$ és $x < y$. Melyik nagyobb: $ax + by$ vagy $ay + bx$?

10. gyakorlat (november 28.)

- RöpZH.
- HF: Megbeszéltük a 2.19. feladatot.
- Becslések: a 4.15. feladat helyett először egy könnyebb feladatot oldottunk meg, nevezetesen adjunk meg olyan N számot, hogy minden $n > N$ esetén $4n^5 + 2n^2 > 10^{10}$. Megadtuk a bal oldal egy alsó becslését utána pedig észrevettük, hogy elegendő azt garantálni, hogy ennél kisebb a 10^{10}. Ezután megoldottuk az eredeti feladatot, ahol szintén a bal oldal egy alsó becslését vettük és ekkor elegendő volt garantálni, hogy annál kisebb az n^4. A 4.18. feladatra kétféle megoldást adtunk. Az első megoldáshoz egy észrevétel kellett, a második megoldáshoz pedig először átrendeztük az egyenlőtlenséget úgy, hogy a „domináns" tag legyen az egyik oldalon. Ezután a másik oldal felső becslését tekintettük és meggondoltuk, hogy ekkor elegendő garantálni, hogy ennél a felső becslésnél nagyobb a „domináns" tag. A 4.38. feladatban megsejtettük, hogy $a_n > b_n$, ha $n > N$ és az előbbi módszerrel adtuk meg N-et. A 4.16. feladattal kapcsolatban felidéztünk alsó és felső becslési módszereket, végül felső becsléssel azt kaptuk, hogy a sorozat minden tagja legfeljebb 1, ezért nincs 100-nál nagyobb tagja.
- HF: 4.52., 4.19., 4.28., 4.53–55.
- Jegyzet: 2. fejezet 5. szakasz.

11. gyakorlat (december 5.)

- RöpZH.
- HF-ok megbeszélése: megoldottuk a kiegészítő feladatsor 10, 11, 14 és 15 feladatait. A 4.28. feladat kapcsán megbeszéltük, hogy ha azt szeretnénk belátni, hogy van 100-nál nagyobb tag, akkor alsó becslésre van szükségünk, ha pedig azt akarjuk megmutatni, hogy nincs ilyen tag, akkor megfelelő felső becslésre. Egy megfelelő alsó becslés segítségével beláttuk, hogy van 100-nál nagyobb tag. Megbeszéltük, hogy a 4.53. feladat nem következik, egy egyszerű ellenpéldát adtunk.
- Inverzes páros feladattal foglalkoztunk, ezután következtetéses feladattal.