

Bevezető analízis 1., 2018. ősz, 2. gyakorló feladatsor

Tudnivalók. Minden feladat 1 pontot ér, de csak teljes **indoklással**. Részpontoszám kapható, azonban súlyos hibát tartalmazó megoldásra nulla pontot adunk, még ha a megoldásnak vannak helyes részei is. A dolgozat értéke osztályzatban kb. 1-gyel kevesebb az elért pontok számánál. A gyakorlatokon bizonyított állítások felhasználhatók bizonyítás nélkül az állítást pontosan idézve (például „Gyakorlaton bizonyítottuk, hogy...”), kivéve ha a feladat éppen a szerepelt állítás bizonyítása. A feladatok nem nehézségi sorrendben következnek. A megoldásra 120 perc áll rendelkezésre.

Semmilyen segédeszköz nem használható, számológép sem! Mobiltelefon, tablet, laptop nem lehet az asztalon, és használni is tilos! Jó munkát!

1. Legyen $f: (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - x^2$. Adjuk meg f inverzét, az inverz értelmezési tartományát és értékkészletét.
2. Határozzuk meg az $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(2 - x)$ függvény maximumát és minimumát.
3. Az x és y valós számok szorzata $\sqrt{2}$. Következik-e ebből, hogy
 - a) az x és y közül legfeljebb az egyik racionális?
 - b) az x és y közül legalább az egyik racionális?
4. Mely b valós számokra igaz, hogy
 - a) ha $x < b$, akkor $x^2 < 4$?
 - b) ha $x^2 < 4$, akkor $x < b$?
5. Igaz-e, hogy ha $0 < a < b$ és $0 < c < d$, akkor $ac < bd$?
6. Van-e olyan N szám, hogy minden $n > N$ esetén $n^5 + 2n^2 > 3n^4 + 4n^3 + 5$?
7. Legyen $n = 1, 2, \dots$ esetén

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{n^n}.$$

Van-e olyan n , amelyre $a_n < 1/1000$?