Differenciálegyenletek a fizikában I. gyakorlat
Fizika BSc I/1.

1. gyakorlat

1. Keressük meg az $\dot{x}(t) = 2\sin t$ differenciálegyenletnek azt az integrálgörbéjét, amely áthalad az origón!

2. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket! Rajzoljuk fel az iránymezőt, illetve a megoldásokat, szemléltessük a kezdeti feltételt.

   (a) $\dot{x}(t) = 1$

   (b) $\dot{x}(t) = x(t)$

3. Oldjuk meg a következő szétválasztható változójú differenciálegyenleteket!

$$\text{(a)} \quad \dot{x}(t) = \frac{1}{t+4} \quad \text{(b)} \quad \dot{x}(t) = \frac{1}{x(t)} \quad \text{(c)} \quad \dot{x}(t) = \frac{1+x(t)}{1-t}$$

$$\text{(d)} \quad \dot{x}(t) = \left(1 + x^2(t)\right)\left(1+t^2\right) \quad \text{(e)} \quad \dot{x}(t) = -\frac{7x(t)}{t(x(t)-5)} \quad \text{(f)} \quad \dot{x}(t) = \frac{1}{x(t)\,(9+4t^2)}$$

$$\text{(g)} \quad \dot{x}(t) = 2x(t)\operatorname{ctg} t \quad \text{(h)} \quad 7t(2x^2(t)-4)\dot{x}(t) = x^4(t)(t+13) \quad \text{(i)} \quad (3+t^5)\dot{x}(t) = 2t^4x(t)$$

4. Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatok megoldásait!

$$\text{(a)} \quad \dot{x}(t) = \frac{x(t)-2}{tx(t)}, \; x(1) = 3 \qquad \text{(b)} \quad \dot{x}(t) = \frac{(2x^2(t)-8)\operatorname{arc\,tg} t}{x(t)(1+t^2)}, \; x(0) = -1$$

5. Oldjuk meg a következő szétválasztható változójú egyenletre visszavezethető differenciálegyenleteket!

$$\text{(a)} \quad t\dot{x}(t) = x(t) + \sqrt{t^2 + x^2(t)} \quad \text{(b)} \quad \dot{x}(t) = (t + x(t))^2 \quad \text{(c)} \quad \dot{x}(t) = \cos(t + x(t))$$

$$\text{(d)} \quad (x(t)+t)\dot{x}(t) = -(x(t)+2t) \quad \text{(e)} \quad 3tx^2(t)\dot{x}(t) = -(t^3 + x^3(t))$$

6. A 100 °C-os meleg lekvárt kirakjuk hűlni a levegőre, amely 20 °C-os. A lekvár hőmérséklete 10 órakor 30 °C, 11 órakor 25 °C. Mikor raktuk ki a lekvárt hűlni? (Tudjuk, hogy a lehűlés sebessége arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével.)

7. A sörélesztő gyártásában nagy szerepet játszó enzimmennyiség növekedési sebessége arányos a folyamatban részt vevő enzim x mennyiségével. Az enzim kezdeti a mennyisége egy óra alatt megkétszereződött. Hányszorosára nő 3 óra alatt?

8. Egy tükör alakja milyen legyen, hogy a párhuzamos fénysugarakat egy pontba verje vissza? Válaszunkat indokoljuk!

9. Az általános relativitáselmélet szerint a magányos, gömbszimmetrikus csillag középpontjától radiális irányban távolodó foton pályáját a téridőben az $[0,\infty) \ni r \mapsto t(r)$ görbe jellemzi. Az r a csillag középpontjától való távolság, $t(r)$ a foton detektálásának időpontja az r távolság függvényében. Ez megoldja a

$$\dot{t}(r) = \frac{1}{c}\frac{r}{r - r_g}, \qquad 0 < t < \infty$$
$$t(0) = r_0$$

   kezdetiérték-feladatot, ahol r_g pozitív konstans, a Schwarzschild-sugár.

10. Homogén gravitációs térben található, állandó hőmérsékletű légoszlop h magasságtól függő $[0,\infty) \ni h \mapsto p(h)$ nyomása megoldja a

$$\dot{p}(h) = -\frac{M}{RT}p(h), \qquad 0 < h < \infty$$
$$p(0) = p_0$$

   kezdetiérték-feladatot.

11. Nagy tömegű csillagok belsejében lévő anyagot gyakran lehet folyadékként modellezni. Ha az R sugarú csillag belsejében, annak középpontjával koncentrikus, r sugarú gömbben $M(r)$ teljes tömeg található, akkor a $[0,R] \ni r \mapsto p(r)$ nyomás megoldása a

$$\dot{p}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}\left(\varrho + \frac{p(r)}{c^2}\right), \qquad 0 < t < \infty$$
$$p(R) = 0$$

kezdetiérték-feladatnak, ahol G, ϱ és c pozitív konstansok.

2. gyakorlat

1. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket!

$$\text{(a)} \quad \dot{x}(t) - tx(t) = t^3 \quad \text{(b)} \quad \dot{x}(t) - 3x(t) = -t^2 \text{(c)} \quad \dot{x}(t) + \frac{2}{t}x(t) = 3$$

$$\text{(d)} \quad t\dot{x}(t) = t + 2x(t) \quad \text{(e)} \quad \dot{x}(t) = \frac{x(t)}{t} + t^2 + 3t - 2 \quad \text{(f)}\dot{x}(t) = 3t^2x(t) + t^2$$

$$\text{(g)} \quad \dot{x}(t)\sin t - x(t)\cos t = -1 \quad \text{(h)} \quad (t-2)\dot{x}(t) - x(t) = 2(t-2)^3 \quad \text{(i)} \quad \dot{x}(t) - 4x(t) = 8t^3 - 3t + 1$$

2. Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatok megoldásait!

$$\text{(a)} \quad \dot{x}(t) - \frac{2}{t}x(t) = t, \;\; x(1) = 3 \qquad \text{(b)} \quad \dot{x}(t) - \frac{x(t)}{t} = t^2 + 3t - 2, \;\; x(1) = 6.$$

3. Oldjuk meg az alábbi Bernoulli-féle differenciálegyenleteket!

$$\text{(a)} \quad \dot{x}(t) - x(t) = tx^4(t) \quad \text{(b)} \quad \dot{x}(t) + x(t) = x^2(t)(\cos t - \sin t) \quad \text{(c)} \quad \big(t^3 + x^3(t)\big) - 3tx^2(t)\dot{x}(t) = 0$$

4. A kis hangya egy 10 cm hosszú gumiszalag jobb végpontjából 1 cm/s sebességgel indul el a szalag rögzített bal végpontja felé. A gonosz manó ezzel egyidejűleg a szalag jobb végpontját 100 cm/s sebességgel húzza hátra. Eljut-e valamikor a hangya a szalag másik végére (és ha igen, mikor)?

5. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyeknek bármely (x, y) pontjához húzott érintő az y tengelyt a $(0, y^2)$ pontban metszi.

6. Egy edényben V liter víz van. Befolyik egy c gramm/liter koncentrációjú oldat r liter/perc sebességgel. Az oldat elkeveredik a vízzel és a felesleges elegy az edény alján kifolyik r liter/perc sebességgel. Mennyi a koncentráció t idő múlva az edényben?

7. Egy E feszültségű és R ellenállású áramkörbe bekötik a c kapacitású kondenzátort. Határozzuk meg a kondenzátor q töltését valamely, a bekapcsolás utáni t pillanatban, ha tudjuk, hogy a folyamat differenciálegyenlete:

$$R\dot{q}(t) = E - \frac{q(t)}{c}.$$

3. gyakorlat

1. Oldjuk meg a következő egzakt differenciálegyenleteket!

$$\text{(a)} \quad (t^3 - 3x^2(t))\dot{x}(t) = -(2t + 3t^2x(t)) \text{(b)} \quad (5x(t) - 2x(t)t)\dot{x}(t) = x^2(t) - e^t \quad \text{(c)} \quad 3tx^2(t)\dot{x}(t) = -(x^3(t) + t^3)$$

$$\text{(d)} \quad t\dot{x}(t) = t^2 - x(t) \quad \text{(e)} \quad (x^2(t) + t\cos x(t))\dot{x}(t) = -t - \sin x(t) \quad \text{(f)} \quad \left(\frac{t^2}{2} + x(t)\right)\dot{x}(t) = -t^2 - tx(t)$$

2. Oldjuk meg a következő másodrendű homogén differenciálegyenleteket!

$$\text{(a)} \quad \ddot{x}(t) + 2x(t) = 0 \quad \text{(b)} \quad \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) = 0 \quad \text{(c)} \quad \ddot{x}(t) - 5\dot{x}(t) + 6x(t) = 0$$

$$\text{(d)} \quad \ddot{x}(t) - 5\dot{x}(t) + 8x(t) = 0 \quad \text{(e)} \quad \ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$$

3. Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatok megoldásait!

$$\text{(a)} \quad \ddot{x}(t) - 9\dot{x}(t) + 14x(t) = 0, \;\; x(0) = 4, \dot{x}(0) = -2 \qquad \text{(b)} \quad \ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) - 3x(t) = 0, \;\; x(0) = 0, \dot{x}(0) = 4$$

4. gyakorlat

1. Oldjuk meg a következő másodrendű inhomogén differenciálegyenleteket!

$$\text{(a)}\quad \ddot{x}(t)-\dot{x}(t)-2x(t)=e^t \quad \text{(b)}\quad \ddot{x}(t)-6\dot{x}(t)+13x(t)=2t+1 \quad \text{(c)}\quad \ddot{x}(t)-6\dot{x}(t)+9x(t)=5t$$

$$\text{(d)}\quad \ddot{x}(t)-2\dot{x}(t)+4x(t)=12t \quad \text{(e)}\quad \ddot{x}(t)-3\dot{x}(t)-10x(t)=2\cos t$$

2. Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-feladat megoldását!

$$\ddot{x}(t)+x(t)=2\sin t\cos t,\ \ x(0)=1,\ \dot{x}(0)=1$$

3. Az alábbi másodrendű, függvény együtthatós egyenleteknél sejtsünk meg egy $x_1(t)$ megoldást és keressük meg a másik megoldást $x_2(t)=x_1(t)z(t)$ alakban!

$$\text{(a)}\quad \left(t^2+1\right)\ddot{x}(t)-2t\dot{x}(t)+2x(t)=0 \quad \text{(b)}\quad (2t+1)\ddot{x}(t)+4t\dot{x}(t)-4x(t)=0$$

$$\text{(c)}\quad t\ddot{x}(t)-(2t+1)\dot{x}(t)+(t+1)x(t)=0$$

4. A kvantummechanika szerint egy L kerületű kör mentén haladó részecske $\psi : [0,L] \to \mathbb{C}$ hullámfüggvénye megoldja az

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\ddot{\psi}(x) &= E\psi(x), \qquad -\infty < x < \infty \\ \psi(0) &= \psi(L) \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladatot. Adott E esetén általában a feladatnak nincs megoldása, így a lehetséges E értékek megadása szintén a problémához tartozik.