

KALKULUS I. GYAKORLAT
FIZIKA BSc I/1.

1. gyakorlat

1. Ábrázoljuk a következő halmazokat a síkon!

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$,
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$,
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4, x + y < 1\}$,
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$.

2. Ha A, B és C adott halmazok, akkor írjuk fel az alábbi halmazokat A, B, C és az \cup, \cap, \setminus halmazműveletek segítségével:

- (a) $E = \{x : x \in A \text{ és } (x \in B \text{ vagy } x \in C)\}$;
- (b) $F = \{x : (x \in A \text{ és } x \in B) \text{ vagy } x \in C\}$.

3. Igazak-e az alábbi halmazegyenlőségek? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, akkor adjunk meg konkrét halmazokat, amelyekre nem teljesül az egyenlőség.

- (a) $(A \cup B) \setminus A = B$;
- (b) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$;
- (c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

4. Igazak-e az alábbi állítások?

- (a) $(A \subset B \text{ és } A \subset C) \iff A \subset B \cup C$;
- (b) $(A \cup C = B \cup C \text{ és } A \setminus C = B \setminus C) \iff A = B$;

5. Legyen X egy halmaz, $A, B \subset X$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad (b) \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

6. Adjuk meg az alábbi állítások tagadását! Melyik igaz közülük, maga az állítás, vagy annak tagadása?

- (a) Minden alma érett.
- (b) Létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0]$ -ra $n > k$.
- (c) Minden p pozitív számhoz létezik $K > 0$, hogy minden $x > K$ esetén $x^2 - px + 1 > 0$.
- (d) Minden $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$ számokhoz létezik olyan $r \in \mathbb{Q}$, hogy $p < r < q$.

7. Legyenek P és Q kijelentések, ekkor a „ha P , akkor Q ” állítás tagadása a „ P és $\neg Q$ ”, a megfordítása pedig a „ha Q , akkor P ” állítás. Adjuk meg az alábbi állítások tagadását és megfordítását is. Melyek lesznek igazak?

- (a) Ha $x > 0$, akkor $x^2 - x > 0$.
- (b) Ha p prímszám, akkor $p^2 + 1$ nem prímszám.

2. gyakorlat

1. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a következő függvények: $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2$. Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket.

2. Írjuk be a hiányzó függvényeket:

- (a) $f(x) = x^2$ $g(x) = x + 1$ $(f \circ g)(x) = ?$
 (b) $f(x) = ?$ $g(x) = x + 4$ $(f \circ g)(x) = x$
 (c) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = ?$ $(f \circ g)(x) = |x|$

3. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények. Igaz-e, hogy ha mindkettő injektív (szürjektív), akkor $f + g$ is injektív (szürjektív)?

4. Mely függvények injektívek, illetve szürjektívek? Amelyek bijektívek is, azoknak adjuk meg az inverzét!

(a) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2};$

(b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3;$

(c) $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = x - \frac{1}{x};$

(d) $k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad k(x) = \frac{1}{x}.$

5. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény. Határozzuk meg az $f^{-1}([4, 9])$, $f^{-1}([-1, 0])$, $f^{-1}([-2, -1])$ halmazokat, ha

(a) $f(x) = x^2;$

(b) $f(x) = \sin x.$

6. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény, $A, B \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmazok.

(a) Mutassuk meg, hogy

i. $A \subset f^{-1}(f(A));$

ii. $f(f^{-1}(B)) \subset B.$

(b) Adjunk példát arra, hogy a fenti tartalmazásoknál általában nincs egyenlőség! (Nézzük meg az előző feladatot.)

3. gyakorlat

1. Mivel egyenlők az alábbi számok?

$$\log_2 16, \quad \log_9 3, \quad \log_6 6, \quad \log_6 6^6, \quad 2^{\log_2 3}, \quad \sin \frac{\pi}{6}, \quad \sin \frac{\pi}{4}, \quad \sin \frac{\pi}{3}, \quad \sin \frac{\pi}{2}, \quad \sin \frac{2\pi}{3}, \quad \sin \pi, \quad \sin \frac{4\pi}{3},$$

$$\sin \frac{5\pi}{3}, \quad \sin \frac{29\pi}{6}, \quad \sin \frac{-2010\pi}{4}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}, \quad \operatorname{sgn} \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{2}, \quad \operatorname{sgn} \operatorname{sgn} \cos \sqrt{2010\pi}$$

2. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! Melyek lesznek párosak, páratlanok, periodikusak? Mi az értelmezési tartomány?

$$x \mapsto 2x - 5, \quad x \mapsto 6 - x, \quad x \mapsto x^2 - 3, \quad x \mapsto (x - 3)^2, \quad x \mapsto 6x - x^2, \quad x \mapsto \operatorname{sgn}(6x - x^2),$$

$$x \mapsto \frac{1}{x + 3}, \quad x \mapsto \frac{-2x - 11}{x + 3}, \quad x \mapsto 2^x, \quad x \mapsto 2^{1-x}, \quad x \mapsto \log_3 |x|, \quad x \mapsto 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 1,$$

$$x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto \cos 2x, \quad x \mapsto 2 \cos \frac{x}{2} - 2, \quad x \mapsto 2 \cos \left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) + 4, \quad x \mapsto |\cos |x||.$$

3. Ábrázoljuk a trigonometrikus függvények inverzeit! Mi az értelmezési tartomány és az értékészlet?

$$\arcsin x = \left(\sin \Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}(x), \quad \arccos x = \left(\cos \Big|_{[0, \pi]}\right)^{-1}(x),$$

$$\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg} \Big|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}(x), \quad \operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{ctg} \Big|_{(0, \pi)}\right)^{-1}(x).$$

4. gyakorlat

1. Végezzük el az alábbi műveleteket:

$$(a) (1+i)(3-2i) =? \quad (b) (i-2)(5-3i) =? \quad (c) (1+\sqrt{3}i)^3 =?$$

$$(d) 1/i =? \quad (e) (1+i)/(3-2i) =? \quad (f) (5+i)/(1+i) =?$$

2. Határozzuk meg azokat a $c + di$ számokat, melyek négyzete $20i - 21$.

3. Írjuk fel az alábbi számokat trigonometrikus alakban:

$$(a) 1+i, \quad (b) 1-i, \quad (c) \sqrt{3}+i, \quad (d) -1-\sqrt{3}i.$$

4. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

$$(a) (1+i)^5 =? \quad (b) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2010} =?$$

5. Oldjuk meg az $x^3 = 1$, $x^4 = -4$ és az $x^6 = 1$ egyenleteket!

6. Számítsuk ki i^n -t, ahol $n \in \mathbb{N}$.

7. (a) Vezessük le a $\sin(\alpha \pm \beta)$ -ra és $\cos(\alpha \pm \beta)$ -ra tanult addíciós képleteket, felhasználva a komplex számok trigonometrikus alakját.

(b) Fejezzük ki $\cos 3\varphi$ -t $\sin \varphi$ és $\cos \varphi$ segítségével.

5. gyakorlat

Emlékeztetőül: az (a_n) sorozat határértéke az $a \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$ -ra $|a_n - a| < \varepsilon$. (Vagyis a sorozat tagjai egy indextől kezdve az $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervallumba esnek.) Sorozatok határértékét általában nem a definíció alapján, hanem a műveleti szabályok és a nevezetes határértékek segítségével számítjuk ki. A $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ alakú sorozatoknál valamilyen ügyes átalakítás szükséges.

Nevezetes határértékek: (a) ha $|q| < 1$, akkor $q^n \rightarrow 0$; (b) ha $a > 0$, akkor $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$, (c) $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

Legyen most $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$. Ekkor az n^k , a^n , $n!$ és n^n sorozatok mindegyike végtelenhez tart, még hozzá egyre gyorsabban, amint ezt az alábbi határértékek mutatják: (d) $\frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0$, (e) $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$, (f) $\frac{n^k}{n!} \rightarrow 0$,

$$(g) \frac{n!}{n^n} \rightarrow 0.$$

1. Mi a határértéke az alábbi (a_n) sorozatoknak? Definíció alapján adott $\varepsilon > 0$ -hoz adjunk meg $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindexet is.

$$(a) a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (b) a_n = \frac{6n+7}{11n-5}.$$

2. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét a határérték és a műveletek közötti szabályok segítségével!

$$(a) 1 + \frac{1}{n}, \quad (b) \frac{2}{n}, \quad (c) \frac{3}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad (d) \frac{\sqrt[n]{2}}{n^2 + 1}.$$

3. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$(a) \frac{n+2}{3n-4} \quad (b) \frac{2n^2-3n-5}{6-n^2} \quad (c) \frac{\sqrt{n^2+3}+2n}{3n+5}$$
$$(d) \frac{3^n - 5 \cdot 2^n}{2 \cdot 3^n + 1, 8^{n+5}} \quad (e) \frac{3^{2n} - 4 \cdot 2^{n+3}}{5^n - 2 \cdot 9^{n+1} + n^6} \quad (f) \frac{2n! + 3^n}{5n^2 - 1 + n!}$$

4. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$(a) \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad (b) \sqrt{n^2 + 6n + 1} - n.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy minden konvergens sorozat korlátos. Igaz-e a megfordítás?

6. gyakorlat

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} =? \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} =? \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} =?$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} =? \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} =? \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2x^2 + 10} =?$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} =? \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} =? \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} =?$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} =? \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} =?$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =? \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} =? \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} =?$$

6. Mi legyen A értéke, hogy f folytonos legyen az $x = 2$ pontban is?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^3-8}, & \text{ha } x \neq 2 \\ A, & \text{ha } x = 2. \end{cases}$$

7. gyakorlat

1. Mutassuk meg a definíció alapján, hogy a következő függvények minden $a \in \mathbb{R}$ pontban differenciálhatók és számítsuk is ki a deriváltakat:

$$(a) f(x) = x^n, \quad (n \geq 1 \text{ egész}), \quad (b) h(x) = \sin x$$

2. Deriváljuk az alábbi függvényeket, felhasználva a deriválási szabályokat:

$$(a) 2 + x - x^2, \quad (b) a^5 + 5a^3x^2 - x^5, \quad (c) (x-a)(x-b),$$

$$(d) \frac{2x}{1-x^2}, \quad (e) \sqrt{x}, \quad (f) \sqrt{x+\sqrt{x}},$$

$$(g) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, \quad (h) x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}, \quad (i) (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3,$$

$$(j) \cos 2x - 2 \sin x, \quad (k) (x \sin \alpha + \cos \alpha)(x \cos \alpha - \sin \alpha), \quad (l) \frac{\sin^2 x}{\sin x^2},$$

$$(m) e^{-x^2}, \quad (n) \ln \ln \ln x, \quad (o) \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

3. Legyen $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Mi lesz $f'(0)$?

4. Az inverzfüggvény deriválási szabályát használva számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját (ahol értelmes):

$$(a) \quad f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad (b) \quad g(x) = \arctg x.$$

5. Mennyi az $f(x) = \sin x + x$ függvény inverzének deriváltja a $b = 1 + \frac{\pi}{2}$ pontban?

8. gyakorlat

Teljes függvényvizsgálat esetén az alábbi lépéseken kell végigmenni:

Deriválás nélkül is megkapható: értelmezési tartomány, [tengelymetszetek (zérushelyek)], limeszek $\pm\infty$ -ben (vagy az értelmezési tartomány „szélein”), folytonosság, bal és jobb oldali limeszek a szakadási pontokban.

Deriválás után: lokális szélsőértékek (a derivált előjelváltásai), inflexiós pontok (a második derivált előjelváltásai), a függvény alaki tulajdonságai (monotonitás, konvexitás), végül a függvény grafikonja, illetve az értékészlet. A monotonitáshoz és a konvexitáshoz érdemes táblázatot készíteni, a grafikonhoz pedig hasznos néhány függvényértéket kiszámolni (pl. a szélsőértékhelyeken).

1. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot!

$$(a) \quad f(x) = 3x - x^3, \quad (b) \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad (c) \quad h(x) = x + \frac{1}{x}, \quad (d) \quad k(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális és globális szélsőérték helyeit!

$$(a) \quad f(x) = 2x - x^4, \quad (b) \quad g(x) = e^x \sin x.$$

3. (a) Egy $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $f'(0) = 0$. Igaz-e, hogy a 0-ban lokális szélsőértéke van?

- (b) Egy $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $f''(0) = 0$. Igaz-e, hogy a 0-ban inflexiós pontja van?

4. Írjuk fel az $f(x) = \cos x + \frac{2}{x^2}$ függvény érintőjének egyenletét az $x_0 = 2$ pontban.

5. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait:

$$(a) \quad x^x, \quad (b) \quad \ln \sin x, \quad (c) \quad \log_x e$$

$$(d) \quad \ln \left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}} \right), \quad (e) \quad \arctg \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)$$

6. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq 1 \\ ax + b, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

Hogyan kell megválasztani a és b értékét, ha azt akarjuk, hogy f differenciálható legyen $x_0 = 1$ -ben is?

9. gyakorlat

1. Írjuk fel az alábbi függvények n -edfokú x_0 -körüli $T_{n,x_0}(x)$ Taylor-polinomját.

(a) $f(x) = e^x, T_{6,0}(x) = ?$

(b) $g(x) = \sqrt{1+x}, T_{2,0}(x) = ?$

(c) $h(x) = x^x, T_{2,1}(x) = ?$

2. Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora hibát követünk el az alábbi közelítő formulával:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \left(x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right).$$

3. Számoljuk ki e értékét legalább 4 tizedesjegy pontossággal csak a négy alapművelet felhasználásával!

4. Számítsuk ki az alábbi határértékeket L'Hospital-szabállyal.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} =? \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} =? \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} =?$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x =? \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x =? \quad (f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos ax}{\log \cos bx} =?$$

10. gyakorlat

1. Az alapintegrálok felhasználásával számoljuk ki a primitív függvényeket.

$$(a) \int \sqrt[3]{x^2} \, dx =? \quad (b) \int \frac{\sqrt[4]{x} \sqrt[5]{x}}{\sqrt[6]{x}} \, dx =? \quad (c) \int (6 \sin x + 5 \cos x) \, dx =?$$

$$(d) \int \operatorname{tg}^2 x \, dx =? \quad (e) \int \frac{5 \cos 2x}{\sin x + \cos x} \, dx =? \quad (f) \int \frac{-5}{2 + 2x^2} \, dx =?$$

2. Az $\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$ formulát használva számítsuk ki a primitív függvényeket.

$$(a) \int \frac{dx}{x + a} =? \quad (b) \int (2x - 3)^{10} \, dx =? \quad (c) \int \frac{\sqrt[5]{1 - 2x + x^2}}{1 - x} \, dx =?$$

3. Számoljuk ki az alábbi $f^n(x)f'(x)$ és $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú integrandusok primitív függvényét.

$$(a) \int x^2(2x^3 + 4) \, dx =? \quad (b) \int \sin x \cos x \, dx =? \quad (c) \int \sin^4 x \sin 2x \, dx =?$$

$$(d) \int \frac{4 \sin x}{5 \cos x + 4} \, dx =? \quad (e) \int \frac{1}{x \ln x} \, dx =?$$

4. Számoljuk ki a primitív függvényeket parciális integrálással.

$$(a) \int x e^{-x} \, dx =? \quad (b) \int x \cos x \, dx =? \quad (c) \int \ln x \, dx =?$$

$$(d) \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx =? \quad (e) \int e^{2x} \operatorname{sh} 4x \, dx =?$$

11. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat alkalmas helyettesítéssel, vagy akár más módon is.

$$(a) \int e^{\sqrt{x}} \, dx =? \quad (b) \int \frac{1}{\sqrt{36 - 16x^2}} \, dx =? \quad (c) \int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \, dx =?$$

$$(d) \int \frac{1}{25 + x^2} \, dx =? \quad (e) \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} \, dx =? \quad (f) \int \sqrt{1 - x^2} \, dx =?$$

$$(g) \int x^2 \sqrt[3]{1 + x^3} \, dx =? \quad (h) \int \frac{x^3}{(x - 1)^{100}} \, dx =? \quad (i) \int \frac{1}{\operatorname{sh} x} \, dx =?$$

$$(j) \int \sin \ln x \, dx =? \quad (k) \int x \sin \sqrt{x} \, dx =? \quad (l) \int \frac{1}{1 + \cos x} \, dx =?$$