Kalkulus I. gyakorlat
Fizika BSc I/1.

1. gyakorlat

1. Ábrázoljuk a következő halmazokat a síkon!

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x + y < 1\}$,

   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < 4\}$,

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < 4, \; x + y < 1\}$,

   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; |x| + |y| < 1\}$.

2. Ha A, B és C adott halmazok, akkor írjuk fel az alábbi halmazokat A, B, C és az $\cup, \cap, \setminus$ halmazműveletek segítségével:

   (a) $E = \{x : \; x \in A \text{ és } (x \in B \text{ vagy } x \in C)\}$;

   (b) $F = \{x : \; (x \in A \text{ és } x \in B) \text{ vagy } x \in C)\}$.

3. Igazak-e az alábbi halmazegyenlőségek? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, akkor adjunk meg konkrét halmazokat, amelyekre nem teljesül az egyenlőség.

   (a) $(A \cup B) \setminus A = B$;

   (b) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$;

   (c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

4. Igazak-e az alábbi állítások?

   (a) $(A \subset B \text{ és } A \subset C) \iff A \subset B \cup C$;

   (b) $(A \cup C = B \cup C \text{ és } A \setminus C = B \setminus C) \iff A = B$;

5. Legyen X egy halmaz, $A, B \subset X$. Bizonyítsuk be, hogy

   $$\text{(a)} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \text{(b)} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

6. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a következő függvények: $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2$. Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket.

7. Írjuk be a hiányzó függvényeket:

(a)	$f(x) = x^2$	$g(x) = x + 1$	$(f \circ g)(x) = \,?$
(b)	$f(x) = ?$	$g(x) = x + 4$	$(f \circ g)(x) = x$
(c)	$f(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = ?$	$(f \circ g)(x) = \lvert x \rvert$

8. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények. Igaz-e, hogy ha mindkettő injektív, akkor $f + g$ is injektív?

9. Mely függvények injektívek? Amennyiben létezik, adjuk meg az inverzét!

   (a) $f : [0, 1] \to [0, 1], \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3$;

   (c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x - \dfrac{1}{x}$;

   (d) $k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad k(x) = \dfrac{1}{x}$.

10. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény. Határozzuk meg az $f^{-1}([4, 9])$, $f^{-1}([-1, 0])$, $f^{-1}([-2, -1])$ halmazokat, ha

    (a) $f(x) = x^2$;

    (b) $f(x) = \sin x$.

11. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvény, $A, B \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmazok.

    (a) Mutassuk meg, hogy

       i. $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$;

ii. $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.

(b) Adjunk példát arra, hogy a fenti tartalmazásoknál általában nincs egyenlőség! (Nézzük meg az előző feladatot.)

2. gyakorlat

1. Mivel egyenlők az alábbi számok?

$$\log_2 16,\quad \log_9 3,\quad \log_6 6,\quad \log_6 6^6,\quad 2^{\log_2 3},\quad \sin\frac{\pi}{6},\quad \sin\frac{\pi}{4},\quad \sin\frac{\pi}{3},\quad \sin\frac{\pi}{2},\quad \sin\frac{2\pi}{3},\quad \sin\pi,\quad \sin\frac{4\pi}{3},$$

$$\sin\frac{5\pi}{3},\quad \sin\frac{29\pi}{6},\quad \sin\frac{-2010\pi}{4},\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6},\quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4},\quad \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3},\quad \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4},\quad \operatorname{sgn}\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{2},\quad \operatorname{sgn}\operatorname{sgn}\cos\sqrt{2010}\pi$$

2. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! Melyek lesznek párosak, páratlanok, periodikusak? Mi az értelmezési tartomány?

$$x\mapsto 2x-5,\quad x\mapsto 6-x,\quad x\mapsto x^2-3,\quad x\mapsto (x-3)^2,\quad x\mapsto 6x-x^2,\quad x\mapsto \operatorname{sgn}(6x-x^2),$$

$$x\mapsto \frac{1}{x+3},\quad x\mapsto \frac{-2x-11}{x+3},\quad x\mapsto 2^x,\quad x\mapsto 2^{1-x},\quad x\mapsto \log_3|x|,\quad x\mapsto 5\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}-1,$$

$$x\mapsto \cos x,\quad x\mapsto \cos 2x,\quad x\mapsto 2\cos\frac{x}{2}-2,\quad x\mapsto \cos x,\quad x\mapsto \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),\quad x\mapsto \big|\cos|x|\big|.$$

3. Ábrázoljuk a trigonometrikus függvények inverzeit! Mi az értelmezési tartomány és az értékkészlet?

$$\arcsin x = \left(\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}(x),\quad \arccos x = \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}(x),$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \left(\operatorname{tg}\big|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}(x),\quad \operatorname{arc\,ctg} x = \left(\operatorname{ctg}\big|_{(0,\pi)}\right)^{-1}(x).$$

3. gyakorlat

Emlékeztetőül: az (a_n) sorozat határértéke az $a\in\mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon>0$-hoz létezik $n_0\in\mathbb{N}$, hogy minden $n\ge n_0$-ra $|a_n-a|<\varepsilon$. (Vagyis a sorozat tagjai egy indextől kezdve az $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intervallumba esnek.) Sorozatok határértékét általában nem a definíció alapján, hanem a műveleti szabályok és a nevezetes határértékek segítségével számítjuk ki. A $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ alakú sorozatoknál valamilyen ügyes átalakítás szükséges.

Nevezetes határértékek: (a) ha $|q|<1$, akkor $q^n\to 0$; (b) ha $a>0$, akkor $\sqrt[n]{a}\to 1$, (c) $\sqrt[n]{n}\to 1$.

Legyen most $a>1$, $k\in\mathbb{N}$. Ekkor az n^k, a^n, $n!$ és n^n sorozatok mindegyike végtelenhez tart, méghozzá egyre gyorsabban, amint ezt az alábbi határértékek mutatják: (d) $\frac{n^k}{a^n}\to 0$, (e) $\frac{a^n}{n!}\to 0$, (f) $\frac{n^k}{n!}\to 0$, (g) $\frac{n!}{n^n}\to 0$.

1. Mi a határértéke az alábbi (a_n) sorozatoknak? Definíció alapján adott $\varepsilon>0$-hoz adjunk meg $n_0\in\mathbb{N}$ küszöbindexet is.

$$\text{(a)}\quad a_n=\frac{1}{\sqrt{n}},\qquad \text{(b)}\quad a_n=\frac{6n+7}{11n-5}.$$

2. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét a határérték és a műveletek közötti szabályok segítségével!

$$\text{(a)}\quad 1+\frac{1}{n},\qquad \text{(b)}\quad \frac{2}{n},\qquad \text{(c)}\quad \frac{3}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right),\qquad \text{(d)}\quad \frac{\sqrt[n]{2}}{n^2+1}.$$

3. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$\text{(a)}\quad \frac{n+2}{3n-4}\qquad \text{(b)}\quad \frac{2n^2-3n-5}{6-n^2}\qquad \text{(c)}\quad \frac{\sqrt{n^2+3}+2n}{3n+5}$$

$$\text{(d)}\quad \frac{3^n-5\cdot 2^n}{2\cdot 3^n+1{,}8^{n+5}}\qquad \text{(e)}\quad \frac{3^{2n}-4\cdot 2^{n+3}}{5^n-2\cdot 9^{n+1}+n^6}\qquad \text{(f)}\quad \frac{2n!+3^n}{5n^2-1+n!}$$

4. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$\text{(a)}\quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n},\qquad \text{(b)}\quad \sqrt{n^2+6n+1}-n.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy minden konvergens sorozat korlátos. Igaz-e a megfordítás?

4. gyakorlat

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=? \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=? \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=?$$

2.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10}=? \qquad \lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10}=? \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10}=?$$

3.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=? \qquad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=? \qquad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=?$$

4.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=? \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=?$$

5.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=? \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=? \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=?$$

6. Mi legyen A értéke, hogy f folytonos legyen az $x=2$ pontban is?
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^3-8}, & \text{ha} \quad x\neq 2\\ A, & \text{ha} \quad x=2.\end{cases}$$

5. gyakorlat

1. Mutassuk meg a definíció alapján, hogy a következő függvények minden $a\in\mathbb{R}$ pontban differenciálhatók és számítsuk is ki a deriváltakat:
$$(a) \quad f(x)=x^n,\ n\geq 1 \text{ egész}, \qquad (b) \quad h(x)=\sin x$$

2. Deriváljuk az alábbi függvényeket, felhasználva a deriválási szabályokat.
$$\text{(a)} \quad 2+x-x^2, \qquad \text{(b)} \quad a^5+5a^3x^2-x^5, \qquad \text{(c)} \quad (x-a)(x-b),$$
$$\text{(d)} \quad \frac{2x}{1-x^2}, \qquad \text{(e)} \quad \sqrt{x}, \qquad \text{(f)} \quad \sqrt{x+\sqrt{x}},$$
$$\text{(g)} \quad \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}, \qquad \text{(h)} \quad x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}, \qquad \text{(i)} \quad (1-x)\left(1-x^2\right)^2\left(1-x^3\right)^3,$$
$$\text{(j)} \quad \cos 2x-2\sin x, \qquad \text{(k)} \quad (x\sin\alpha+\cos\alpha)(x\cos\alpha-\sin\alpha), \qquad \text{(l)} \quad \frac{\sin^2 x}{\sin x^2},$$
$$\text{(m)} \quad e^{-x^2}, \qquad \text{(n)} \quad \ln\ln\ln x, \qquad \text{(o)} \quad \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

3. Legyen $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Mi lesz $f'(0)$?

4. Az inverzfüggvény deriválási szabályát használva számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját (ahol értelmes):
$$\text{(a)} \quad f(x)=\sqrt[n]{x}, \qquad \text{(b)} \quad g(x)=\operatorname{arc\,tg} x.$$

5. Mennyi az $f(x)=\sin x+x$ függvény inverzének deriváltja a $b=1+\frac{\pi}{2}$ pontban?

6. gyakorlat

Teljes függvényvizsgálat esetén az alábbi lépéseken kell végigmenni:

Deriválás nélkül is megkapható: értelmezési tartomány, [tengelymetszetek (zérushelyek)], limeszek $\pm\infty$-ben (vagy az értelmezési tartomány „szélein”), folytonosság, bal és jobb oldali limeszek a szakadási pontokban.

Deriválás után: lokális szélsőértékek (a derivált előjelváltásai), inflexiós pontok (a második derivált előjelváltásai), a függvény alaki tulajdonságai (monotonitás, konvexitás), végül a függvény grafikonja, illetve az értékkészlet. A monotonitáshoz és a konvexitáshoz érdemes táblázatot készíteni, a grafikonhoz pedig hasznos néhány függvényértéket kiszámolni (pl. a szélsőértékhelyeken).

1. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot!

$$\text{(a)}\quad f(x) = 3x - x^3, \qquad \text{(b)}\quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{(c)}\quad h(x) = x + \frac{1}{x}, \qquad \text{(d)}\quad k(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális és globális szélsőértékhelyeit!

$$\text{(a)}\quad f(x) = 2x - x^4, \qquad \text{(b)}\quad g(x) = e^x \sin x.$$

3. (a) Egy $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ függvényre $f'(0) = 0$. Igaz-e, hogy a 0-ban lokális szélsőértéke van?
   (b) Egy $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ függvényre $f''(0) = 0$. Igaz-e, hogy a 0-ban inflexiós pontja van?

4. Írjuk fel az $f(x) = \cos x + \dfrac{2}{x^2}$ függvény érintőjének egyenletét az $x_0 = 2$ pontban.

5. Írjuk fel a $k(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ függvény érintőjének egyenletét az $x_0 = 2$ pontban. Húzzuk be ezt az egyenest az 1. (d) feladat ábrájába!

6. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait:

$$\text{(a)}\quad x^x, \qquad \text{(b)}\quad \ln \sin x, \qquad \text{(c)}\quad \log_x e$$

$$\text{(d)}\quad \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right), \qquad \text{(e)}\quad \operatorname{arc\,tg}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

7. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha} \quad x \le 1 \\ ax + b, & \text{ha} \quad x > 1 \end{cases}$$

Hogyan kell megválasztani a és b értékét, ha azt akarjuk, hogy f differenciálható legyen $x_0 = 1$-ben is?

7. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket L'Hospital-szabállyal.

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = ? \qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} = ? \qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3} = ?$$

$$\text{(d)}\quad \lim_{x\to 0+} x \ln x = ? \qquad \text{(e)}\quad \lim_{x\to 0+} x^x = ? \qquad \text{(f)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = ?$$

2. Írjuk fel az alábbi függvények n-edfokú x_0-körüli $T_{n,x_0}(x)$ Taylor-polinomját.
   (a) $f(x) = e^x$, $T_{6,0}(x) = ?$
   (b) $g(x) = \sqrt{1+x}$, $T_{2,0}(x) = ?$
   (c) $h(x) = x^x$, $T_{2,1}(x) = ?$

3. Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora hibát követünk el az alábbi közelítő formulával:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \qquad \left(x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right).$$

4. Számoljuk ki e értékét legalább 4 tizedesjegy pontossággal csak a négy alapművelet felhasználásával!

8. gyakorlat

1. Végezzük el az alábbi műveleteket:

$$\text{(a)}\quad (1+i)(3-2i) = ? \qquad \text{(b)}\quad (i-2)(5-3i) = ? \qquad \text{(c)}\quad (1+\sqrt{3}\,i)^3 = ?$$

$$\text{(d)}\quad 1/i = ? \qquad \text{(e)}\quad (1+i)/(3-2i) = ? \qquad \text{(f)}\quad (5+i)/(1+i) = ?$$

2. Határozzuk meg azokat a $c + di$ számokat, melyek négyzete $20i - 21$.

3. Írjuk fel az alábbi számokat trigonometrikus alakban:

$$\text{(a)}\quad 1+i, \qquad \text{(b)}\quad 1-i, \quad \text{(c)}\quad \sqrt{3}+i, \qquad \text{(d)}\quad -1-\sqrt{3}i.$$

4. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

$$\text{(a)}\quad (1+i)^5 = ? \qquad \text{(b)}\quad \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^{2010} = ?$$

5. Oldjuk meg az $x^3 = 1$, $x^4 = -4$ és az $x^6 = 1$ egyenleteket!

6. Számítsuk ki i^n-t, ahol $n \in \mathbb{N}$.

7. (a) Vezessük le a $\sin(\alpha \pm \beta)$-ra és $\cos(\alpha \pm \beta)$-ra tanult addíciós képleteket, felhasználva a komplex számok trigonometrikus alakjával végzett aritmetrikus műveleteket (a szorzás szabálya felhasználható).
   (b) Fejezzük ki $\cos 3\varphi$-t $\sin\varphi$ és $\cos\varphi$ segítségével.

9. gyakorlat

1. Az alapintegrálok felhasználásával számoljuk ki a primitív függvényeket.

$$\text{(a)}\quad \int \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(b)}\quad \int \frac{\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(c)}\quad \int (6\sin x + 5\cos x)\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\text{(d)}\quad \int \mathrm{tg}^2\, x\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(e)}\quad \int \frac{5\cos 2x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(f)}\quad \int \frac{-5}{2+2x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

2. Az $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ formulát használva számítsuk ki a primitív függvényeket.

$$\text{(a)}\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = ? \qquad \text{(b)}\quad \int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(c)}\quad \int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\,\mathrm{d}x = ?$$

3. Számoljuk ki az alábbi $f^n(x)f'(x)$ és $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú integrandusok primitív függvényét.

$$\text{(a)}\quad \int x^2(2x^3+4)\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(b)}\quad \int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(c)}\quad \int \sin^4 x \sin 2x\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\text{(d)}\quad \int \frac{4\sin x}{5\cos x + 4}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(e)}\quad \int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = ?$$

4. Primitív függvény kiszámítása parciális integrálással.

$$\text{(a)}\quad \int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(b)}\quad \int x\cos x\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(c)}\quad \int \ln x\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\text{(d)}\quad \int \mathrm{arc\,tg}\, x\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(e)}\quad \int e^{2x}\,\mathrm{sh}\, 4x\,\mathrm{d}x = ?$$

10. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat alkalmas helyettesítéssel, vagy akár más módon is.

$$\text{(a)}\quad \int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(b)}\quad \int \frac{1}{\sqrt{36-16x^2}}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(c)}\quad \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\text{(d)}\quad \int \frac{1}{25+x^2}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(e)}\quad \int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(f)}\quad \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\text{(g)}\quad \int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(h)}\quad \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(i)}\quad \int \frac{1}{\mathrm{sh}\, x}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\text{(j)}\quad \int \sin\ln x\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(k)}\quad \int x\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \text{(l)}\quad \int \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = ?$$

11. gyakorlat

Határozott integrálok kiszámításához az alábbi tétel szerint elég az integrandus egy primitív függvényét ismerni.

1. Tétel (Newton–Leibniz). *Ha f folytonos az $[a,b]$ intervallumon és F primitív függvénye f-nek, akkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

1. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\ \mathrm{d}x,\quad \int_{0}^{1} 3x^5 - x^2\ \mathrm{d}x,\quad \int_{0}^{1} e^x\ \mathrm{d}x,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\ \mathrm{d}x,\quad \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\ \mathrm{d}x;$

   (b) $\displaystyle\int_{0}^{2} xe^x\ \mathrm{d}x,\quad \int_{0}^{3} \operatorname{arc\,tg} x\ \mathrm{d}x;$

   (c) $\displaystyle\int_{1}^{2} (3x+4)^3\ \mathrm{d}x,\quad \int_{0}^{1} e^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x,\quad \int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x,\quad \int_{0}^{1} \frac{e^{2x}}{1+e^x}\ \mathrm{d}x.$

2. Számítsuk ki az alábbi síkidomok területét!

   (a) $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y\le 4-x^2\big\};$

   (b) $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2\le y\le x+2\big\};$

   (c) $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\ge 0,\ x^2\le y\le \sqrt{x}\big\};$

   (d) az $y=\sin x$ és az $y=(2/\pi)x$ görbék által határolt síkidom az első síknegyedben.

12. gyakorlat

1. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények összes lehetséges elsőrendű parciális deriváltfüggvényét!

$$\text{(a)}\quad f(x,y)=x^2 \qquad \text{(b)}\quad f(x,y)=y^3 \qquad \text{(c)}\quad f(x,y)=x^2+y^3$$

$$\text{(d)}\quad f(x,y)=x^2y^4 \qquad \text{(e)}\quad f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)} \qquad \text{(f)}\quad f(x,y)=\frac{x^2y^2}{e^y}$$

2. Határozzuk meg a $\partial_1 f,\ \partial_2 f,\ \partial_3 f,\ \partial_1^2 f,\ \partial_2^2 f,\ \partial_1\partial_3 f,\ \partial_1\partial_2\partial_3 f,\ \partial_3\partial_2\partial_1 f$ függvényeket az alábbi függvények esetén:
   (a) $f(x,y,z)=5z$,
   (b) $f(x,y,z)=x+y+z$,
   (c) $f(x,y,z)=ze^{x-y}$.

3. Mi lesz a $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ függvény Jacobi-mátrixa, ha $g(x,y)=$

$$\text{(a)}\quad (x,\ y) \qquad \text{(b)}\quad \left(x^4+x^2y^2+y^4,\ x^4+x^2y^2+y^4\right) \qquad \text{(c)}\quad (e^x\cos y,\ e^x\sin y)$$

$$\text{(d)}\quad \left(e^{x^2+\operatorname{sh}3x}\cos y,\ e^x\sin\left(y+\ln 2y\right)\right)$$

4. Számítsuk ki $f'(x,y,z)$-t, ha $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y,z)=$

$$\text{(a)}\quad (x^2y,\ y+z) \qquad \text{(b)}\quad \left(x^y,\ x^{y^z}\right)$$

5. Számítsuk ki $f''(3,4)$-et, ahol

$$\text{(a)}\quad f(x,y)=xy \qquad \text{(b)}\quad f(x,y)=x^4+x^2y^2+y^4 \qquad \text{(c)}\quad f(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$$

6. Mutassuk meg, hogy ha $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, illetve $u(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$, akkor

$$\Delta u := \partial_1^2 u(x,y)+\partial_2^2 u(x,y)=0.$$