Kiegészítő feladatok a Többváltozós analízis 2. tárgyhoz

2018. tavaszi félév

1. Közönséges differenciálegyenletek

1.1 Oldjuk meg a következő szétválasztható változójú differenciálegyenleteket!

a) $(x+1)y' = 1$

b) $y' = e^{y-x}$

c) $(1+x^3)y' + x^2y = 0$

d) $y' = \dfrac{4y}{x(y-3)}$

e) $e^{y-x}y' + e^{x-y} = 0$

1.2 Szétválasztható változójúra visszavezetéssel oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket!

a) $y' = (x+y)^2$

b) $(2x+y)y' = 1$

c) $xy' + x - y = 0$

d) $x^2y' = xy + x^2 + y^2$

e) $(x+y)y' + 2x + y = 0$

1.3 Oldjuk meg a következő elsőrendű differenciálegyenleteket!

a) $y' + y = e^{-x}$

b) $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3$

c) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$

d) $y' + y = \cos x$

e) $y' - xy = x^3$

1.4 Oldjuk meg a következő homogén másodrendű differenciálegyenleteket!

a) $y'' + 2y = 0$

b) $y'' + 2y' = 0$

c) $y'' - 5y' + 6y = 0$

d) $y'' - 5y' + 8y = 0$

e) $y'' - 2y' + y = 0$

1.5 Oldjuk meg a következő inhomogén másodrendű differenciálegyenleteket!

a) $y'' - y' - 2y = e^x$

b) $y'' - 6y' + 13y = 2x + 1$

c) $y'' - 6y' + 9y = 5x$

d) $y'' - 2y' + 4y = 12x$

e) $y'' - 3y' - 10y = 2\cos x$

1.6 Egy baktériumtenyészetben a baktériumok számának növekedési sebessége arányos a baktériumok számával. Ha a baktériumok száma 48 óra alatt 100-ról 1000-re nőtt, megállapítható-e, hogy hány baktérium volt az első 24 óra végén?

1.7 A sörélesztő gyártásában nagy szerepet játszó enzimmennyiség növekedési sebessége arányos a folyamatban részt vevő enzimmennyiséggel. Az enzim kezdeti mennyisége egy óra alatt megkétszereződött. Hányszorosára nő 3 óra alatt?

1.8 A kemencéből kivett kenyér hőmérséklete 20 perc alatt 100°C-ról 60°C-ra csökken. A levegő hőmérséklete 25°C. Newton lehűlési törvénye szerint a hűlés sebessége arányos a meleg test és a hidegebb környezete közötti hőmérséklet-különbséggel. A hűtés kezdetétől számítva mennyi idő alatt csökken a kenyér hőmérséklete 30°C-ra?

1.9 Egy edényben V liter víz van. Az edénybe egy csapból r liter/perc sebességgel c gramm/liter koncentrációjú sóoldat folyik. Az oldat azonnal elkeveredik a vízzel, és a felesleges elegy az edény alján található nyíláson keresztül r liter/perc sebességgel kifolyik. Mennyi az edényben lévő sóoldat koncentrációja t idő múlva?

1.10 Egy testet függőlegesen felfelé hajítanak v_0 kezdősebességgel. Határozzuk meg a mozgás út-idő függvényét a kezdeti pillanatban elfoglalt helyétől számítva, feltéve, hogy a test csakis a nehézségi erő hatására mozog.

1.11 Melyek azok a $(0, \infty)$-en értelmezett függvények, amelyeknél a grafikonhoz húzott érintőre igaz, hogy az érintési pont felezi az érintőnek a koordinátatengelyek közti darabját?

1.12 Határozzuk meg azokat a $(0, \infty)$-en értelmezett függvényeket, amelyekre a következő állítás igaz: a grafikon tetszőleges pontjának az origótól mért távolsága ugyanakkora, mint annak a szakasznak a hossza, amelyet a pontban a görbéhez húzott érintő az y tengelyből lemetsz.

1.13 Egy motorcsónak sebessége állóvízben $v_0 = 18$ km/h. Teljes sebességgel halad, majd a motor leáll, ezután 40 s alatt a csónak sebessége $v_1 = 9$ km/h-ra csökken. A víz ellenállása arányos a csónak sebességével. Mekkora a csónak sebessége 2 perccel a motor kikapcsolása után?

1.14 Egy m tömegű test h magasságból esik le. Esés közben a testre kv nagyságú, felfele mutató közegellenállási erő hat, ahol v a test pillanatnyi sebessége. Határozzuk meg a test sebességét az idő függvényében!

1.15 Egy téli napon valamely időpontban elkezdett állandó intenzitással esni a hó. Délben egy hókotró elindult, hogy letakarítsa az autópályát. A hókotró egyenlő időközök alatt egyenlő mennyiségű havat kotort el, és így az első két óra végére 2 km-t utat takarított le, a következő két óra elteltével pedig még további 1 km-t. Mikor kezdett el esni a hó?

1.16 Egy rakétát $v_0 = 100$ km/s kezdősebességgel lőnek ki függőlegesen felfelé. A légellenállásból származó lassulása kv^2, ahol v a rakéta pillanatnyi sebessége, k pedig arányossági tényező. Határozzuk meg, hogy mennyi idő múlva éri el a rakéta legmagasabb helyzetét!

1.17 A rezgőmozgást végző m tömegű testre egy, a sebességgel arányos fékező erő hat (csillapított rezgőmozgás). Ilyen csillapítást végez például az autó kerekén a lengéscsillapító. Ekkor a mozgás differenciálegyenlete $my'' + cy' + ky = 0$, ahol $k > 0$ a rugóállandó, $c > 0$ a csillapítási tényező. Keressük meg az egyenlet megoldásait és vizsgáljuk meg a megoldások menetét!

1.18 Vizsgáljuk meg az $my'' + ky = M \sin(\omega_k t)$ egyenlettel leírt kényszerrezgést (ahol $M \sin(\omega_k t)$ a kényszererő nagysága)!

---

2. Jordan-mérték

2.1 Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ tetszőleges halmaz. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi tulajdonságok ekvivalensek:

(i) H korlátos;

(ii) H lefedhető origó középpppontú (nyílt vagy zárt) gömbbel;

(iii) H lefedhető valamilyen középpontú (nyílt vagy zárt) gömbbel;

(iv) H lefedhető téglával.

2.2 Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ tetszőleges halmaz. Mutassuk meg, hogy $x \in \operatorname{cl} H$ pontosan akkor, ha x minden környezetében van H-beli pont.

2.3 Van-e a síkon olyan, az üreshalmaztól és a síktól különböző halmaz, amely egyszerre nyílt és zárt is?

2.4 Mi a logikai kapcsolat az alábbi kijelentések között, ha $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz?

P: H nullmértékű.

Q: ∂H nullmértékű

2.5 Mi a logikai kapcsolat az alábbi kijelentések között, ha $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz?

P: H mérhető.

Q: ∂H mérhető.

2.6 Igazoljuk, hogy ha H véges halmaz a síkon, akkor nullmértékű.

2.7 Igaz-e, hogy ha az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja nullmértékű a síkon, akkor f Riemann-integrálható?

2.8 Bizonyítsuk be, hogy ha H háromszöglap a síkon, amelynek egyik oldala az x tengellyel párhuzamos, akkor területe $a \cdot m_a/2$, ahol a az x tengellyel párhuzamos oldalt, m_a pedig a hozzá tartozó magasságot jelöli.

2.9 Igazoljuk, az $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ $(a, b > 0)$ egyenletű ellipszis területe $ab\pi$.

2.10 Mérhető-e a $H = \{(x, y) : x = 1/n, n \in \mathbb{N}^+, 0 \le y \le 1\}$ halmaz („$1/n$ fésű”) a síkon, és ha igen, mennyi a területe?

2.11 Van-e olyan korlátos H halmaz a síkon, amelyre $b(H) = 1$ és $k(H) = 2$?

2.12 Számítsuk ki a $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(1/2,1/2,1)$ csúcsok által meghatározott négyzet alapú gúla térfogatát.

2.13 Mi a kapcsolat az alábbi kijelentések között, ha $H \subset \mathbb{R}^3$ korlátos halmaz?

P: A H halmaz mérhető $\mathbb{R}^3$-ben.

Q: Minden z esetén H-nak a z magasságú szekciója mérhető $\mathbb{R}^2$-ben.

2.14 Igaz-e, hogy ha az $A, B \subset \mathbb{R}^3$ korlátos halmazok z magasságú szekciói minden z esetén egyenlő mértékűek, akkor A és B térfogata egyenlő?

2.15 Tekintsünk két végtelen hengert, amelyek sugara R és a tengelyeik merőlegesen metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a metszetükként előálló test térfogata kétszer akkora, mint annak a testnek a térfogata, amelyet úgy kapunk, hogy egy $2R$ alapélű, R magasságú négyzetalapú hasábból elhagyunk („mint dinnyéből a léket") egy „fejtetőre állított" $2R$ alapélű, R magasságú négyzetalapú gúlát.

---

3. Többváltozós integrál

3.1 Legyen $f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$, amelyre $f(0,0)=1$ és $f(x,y)=0$ különben. Integrálható-e f? Ha igen, mennyi az integrálja?

3.2 Legyen $f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$, amelyre $f(x,y)=1$, ha $x=y$, különben pedig $f(x,y)=0$. Integrálható-e f? Ha igen, mennyi az integrálja?

3.3 Legyen $f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$, amelyre $f(1/n,1/n)=n$, ha n pozitív egész és $f(x,y)=0$ különben. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx,$$

de f nem integrálható a $[0,1]\times[0,1]$ négyzeten.

3.4 Ismert, hogy egy m tömegű tömegpontnak egy adott tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka mr^2, ahol r a pont távolsága a tengelytől. Mutassuk meg, hogy az xy síkban fekvő $\varrho(x,y)$ sűrűségű H lemeznek a z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

$$\int_H r^2(x,y)\varrho(x,y)\,dx\,dy,$$

ahol $r(x,y)$ az (x,y) pont távolsága az origótól.

---

4. Sík- és térgörbék

4.1 Rajzoljuk le az alábbi síkgörbéket.

a) (t,t^2) $(t\in[-1,1])$

b) (t^2,t) $(t\in[-1,1])$

c) (t^2,t^3) $(t\in\mathbb{R})$ (szemikubikus parabola)

d) $(a\cos t, b\sin t)$ $(t\in[0,2\pi])$

e) $(\operatorname{ch} t,\operatorname{sh} t)$ $(t\in\mathbb{R})$

f) $(t\cos t, t\sin t)$ $(t\geq 0)$ (arkhimédészi spirál)

g) $(e^t\cos t, e^t\sin t)$ $(t\in\mathbb{R})$ (logaritmikus spirál)

h) $\left(\dfrac{\cos t}{\max(|\cos t|,|\sin t|)},\dfrac{\sin t}{\max(|\cos t|,|\sin t|)}\right)$ $(t\in[0,2\pi])$

4.2 Adjuk meg az alábbi halmazok egy paraméterezését.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = -x, x \geq -1\}$

4.3 Adjuk meg az $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ függvény grafikonjának egy folytonos paraméterezését. Van-e a grafikonnak differenciálható paraméterezése? Ha van, adjunk meg egyet; ha nincs, bizonyítsuk be.

4.4 Számítsuk ki az $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ függvény grafikonjának ívhosszát.

4.5 Igazoljuk, hogy ha $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos és monoton függvény, akkor a grafikonjának ívhossza

a) legalább 1;

b) legfeljebb 2.

Lehet-e a fentieknél jobb alsó vagy felső korlátot adni az ívhosszra?

4.6 Számítsuk ki a $(\cos^3 t, \sin^3 t)$ $(t \in [0, 2\pi])$ paraméterezéssel megadott asztrois ívhosszát. Rajzoljuk le a görbét.

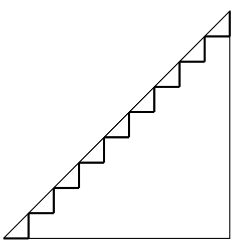
4.7 Mutassuk meg, hogy az asztrois érintőinek a koordinátatengelyek közé eső szakasza állandó hosszúságú.

4.8 Számítsuk ki a $(\cos t, \sin t, t)$ $(t \in [0, 2\pi])$ csavarvonal ívhosszát. Mutassuk meg, hogy a görbe egy hengerfelületre „tekeredik fel”. Bizonyítsuk be, hogy a görbe bármely érintője az érintési ponton átmenő vízszintes síkkal mindig ugyanakkora szöget zár be. Mekkora ez a szög?

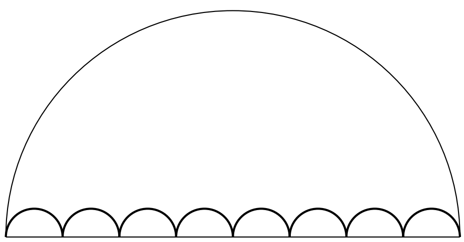
4.9 Adjunk meg olyan folytonos térgörbét, amely a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúpfelületre „tekeredik fel”.

4.10 Egy egyenlőszárú derékszögű háromszög befogói egységnyi hosszúságúak. A háromszög $\sqrt{2}$ hosszú átfogójára az 1. ábrán látható módon egy olyan lépcsőszerű töröttvonalat rajzoltunk, amely n darab, a befogókkal párhuzamos és egyenlő hosszúságú szakaszból áll. Ekkor a töröttvonal s_n hossza a két befogó hosszának összege, azaz $s_n = 2$. Ha $n \to \infty$, akkor a töröttvonal az átfogóhoz tart, így $s_n \to \sqrt{2}$, tehát $2 = \sqrt{2}$. Hol a hiba az iménti érvelésben?

4.11 Egy egység sugarú félkör átmérőjére a 2. ábrán látható módon n darab egymáshoz csatlakozó egybevágó félkörívet rajzoltunk. Ekkor a félkörívek összhossza megegyezik az eredeti félkörív hosszával, azaz $s_n = \pi$. Ha $n \to \infty$, akkor a félkörívekből álló görbe az átmérőhöz tart, így $s_n \to 2$, tehát $2 = \pi$. Hol a hiba az iménti érvelésben?



1. ábra.



2. ábra.