Kalkulus I. gyakorlat, megoldásvázlatok
Fizika BSc I/1.

1. gyakorlat

1. Ábrázoljuk a következő halmazokat a síkon!

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y < 1\}$,

   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 4\}$,

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 4, \ x + y < 1\}$,

   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| < 1\}$.

2. Ha A, B és C adott halmazok, akkor írjuk fel az alábbi halmazokat A, B, C és az $\cup, \cap, \setminus$ halmazműveletek segítségével:

   (a) $E = \{x : \ x \in A$ és $(x \in B$ vagy $x \in C)\}$;

   (b) $F = \{x : \ (x \in A$ és $x \in B)$ vagy $x \in C)\}$.

   Megoldás. (a) $E = A \cap (B \cup C)$;

   (b) $F = (A \cap B) \cup C$.

3. Igazak-e az alábbi halmazegyenlőségek? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, akkor adjunk meg konkrét halmazokat, amelyekre nem teljesül az egyenlőség.

   (a) $(A \cup B) \setminus A = B$;

   (b) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$;

   (c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

   Megoldás. (a) Nem igaz, legyen $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$. Ekkor $(A \cup B) \setminus A = \{2\} \neq B$.

   (b) Nem igaz, legyen $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$. Ekkor $(A \cup B) \setminus C = \{1\}$, de $A \cup (B \setminus C) = \{1, 2\}$.

   (c) Igaz, ugyanis $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \iff x \in (A \cup B)$ és $x \notin (A \cap B) \iff$ vagy $x \in A$, vagy $x \in B \iff$ vagy $x \in (A \setminus B)$, vagy $x \in (B \setminus A) \iff x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

4. Igazak-e az alábbi állítások?

   (a) $(A \subset B$ és $A \subset C) \iff A \subset B \cup C$;

   (b) $(A \cup C = B \cup C$ és $A \setminus C = B \setminus C) \iff A = B$;

   Megoldás. (a) A balról jobbra való következtetés természetesen igaz, ugyanakkor visszafelé nem, legyen például $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{3, 4, 5\}$ és $A = \{2, 3, 4\}$. Ekkor $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \supset A$, de $A \not\subset B$ (és $A \not\subset C$).

   (b) Itt a jobbról balra történő ($\Longleftarrow$) következtetési irány teljesül nyilvánvaló módon, ugyanakkor a másik irány itt sem következik. Legyenek a halmazok olyanok, hogy nemüresek, $A, B \subset C$ és $A \cap B = \emptyset$. Ekkor mindkét feltétel teljesül, de $A \neq B$. Például $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ és $C = \{1, 2\}$.

5. Legyen X egy halmaz, $A, B \subset X$. Bizonyítsuk be, hogy

   $$\text{(a)} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \text{(b)} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

   Megoldás. $x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B \iff x \notin A$ és $x \notin B \iff x \in \overline{A}$ és $x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. A másik állítás bizonyítása teljesen hasonló.

6. Adjuk meg az alábbi állítások tagadását! Melyik igaz közülük, maga az állítás, vagy annak tagadása?

   (a) Minden alma érett.

   (b) Létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0]$-ra $n > k$.

   (c) Minden p pozitív számhoz létezik $K > 0$, hogy minden $x > K$ esetén $x^2 - px + 1 > 0$.

   (d) Minden $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$ számokhoz létezik olyan $r \in \mathbb{Q}$, hogy $p < r < q$.

Megoldás. (a) Van olyan alma, amely éretlen. (Az eredeti állítás tagadása igaz.)

(b) Minden $n \in \mathbb{N}$-hez létezik olyan $k \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0]$, hogy $n \leq k$. (Az eredeti állítás igaz, pl. $n = 1$ minden nempozitív egésznél nagyobb.)

(c) Van olyan p pozitív szám, hogy minden $K > 0$-hoz létezik $x > K$, hogy $x^2 - px + 1 \leq 0$. (Az eredeti állítás igaz, mert a megadott függvény grafikonja p-től függetlenül egy "felfelé álló" parabola, vagyis ha nem metszi az x-tengelyt, akkor bármilyen K jó lesz, ha pedig metszi, akkor a nagyobbik gyöke (ami persze függ p-től) megfelelő K lesz.)

(d) Vannak olyan $p, q \in \mathbb{Q}$, $p < q$ számok, hogy minden $r \in \mathbb{Q}$ esetén $r \leq p$ vagy $q \leq r$. (Az eredeti állítás igaz, ugyanis ha $r = (p+q)/2$, akkor r racionális szám és $p < r < q$.)

7. Legyenek P és Q kijelentések, ekkor a "ha P, akkor Q" állítás tagadása a "P és $\neg Q$", a megfordítása pedig a "ha Q, akkor P" állítás. Adjuk meg az alábbi állítások tagadását és megfordítását is. Melyek lesznek igazak?

   (a) Ha $x > 0$, akkor $x^2 - x > 0$.

   (b) Ha p prímszám, akkor $p^2 + 1$ nem prímszám.

   Megoldás. (a) Az állítás tagadása: (létezik x, hogy) $x > 0$ és $x^2 - x \leq 0$. Az állítás megfordítása: Ha $x^2 - x > 0$, akkor $x > 0$. Az eredeti állítás hamis, legyen pl. $x = 1$, ekkor $x > 0$, de $1^2 - 1 = 0 \not> 0$. A megfordítás is hamis, pl. ha $x = -2$, akkor $(-2)^2 - (-2) = 6 > 0$, de $-2 \not> 0$.

   (b) Az állítás tagadása: (létezik p, hogy) p prímszám és $p^2 + 1$ is prímszám. Az állítás megfordítása: Ha $p^2 + 1$ nem prímszám, akkor p prímszám. Az eredeti állítás hamis, legyen pl. $p = 2$, ekkor p prím és $2^2 + 1 = 5$ is prím. A megfordítás sem igaz, ha ugyanis $p = 8$, akkor $8^2 + 1 = 65$ nem prímszám, de $p = 8$ sem az.

2. gyakorlat

1. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a következő függvények: $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2$. Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket.

   Megoldás. $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2 + 3$. $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = (x + 3)^2$.

2. Írjuk be a hiányzó függvényeket:

   Megoldás.

(a)	$f(x) = x^2$	$g(x) = x + 1$	$(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$
(b)	$f(x) = x - 4$	$g(x) = x + 4$	$(f \circ g)(x) = x$
(c)	$f(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = x^2$	$(f \circ g)(x) = \lvert x\rvert$

3. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények. Igaz-e, hogy ha mindkettő injektív (szürjektív), akkor $f + g$ is injektív (szürjektív)?

   Megoldás. Egyik sem igaz. Legyen $f(x) = x$, $g(x) = -x$. Mindkettő injektív és szürjektív is, de $(f + g)(x) = 0$, ami se nem injektív, se nem szürjektív.

4. Mely függvények injektívek, illetve szürjektívek? Amelyek bijektívek is, azoknak adjuk meg az inverzét!

   (a) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3$;

   (c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x - \dfrac{1}{x}$;

   (d) $k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad k(x) = \dfrac{1}{x}$.

   Megoldás. (a) Ha $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - y^2}$, akkor $1 - x^2 = 1 - y^2 \iff x^2 = y^2$, amiből következik, hogy $x = y$ (hiszen csak a $[0, 1]$-en vagyunk). Tehát f injektív, de $R(f) = [0, 1]$, így nem szürjektív. Viszont ha f-et, mint $f : [0, 1] \to [0, 1]$ függvényként tekintjük, akkor már szürjektív is (az $y = f(x)$ egyenlet minden $y \in R(f)$-re megoldható, az injektivitás miatt egyértelműen), így van inverz. Az $y = \sqrt{1 - x^2}$ egyenletből $x = \sqrt{1 - y^2}$, azaz $f^{-1} : [0, 1] \to [0, 1]$, $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}$. (A függvény inverze önmaga.)

   (b) A függvény injektív ($x^3 = y^3 \iff x = y$) és szürjektív is (minden $y \in \mathbb{R}$-re létezik x, hogy $x^3 = y$, nevezetesen $x := \sqrt[3]{y}$), azaz van az egész számegyenesen értelmezett inverze. A $y = x^3$-ből x és y szerepét felcserélve, majd y-t kifejezve kapjuk, hogy $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

(c) A függvény injektív, tegyük fel ugyanis, hogy $h(x) = h(y)$, azaz $x - 1/x = y - 1/y \iff \frac{x^2-1}{x} = \frac{y^2-1}{y} \iff (x-y)(xy+1) = 0$. Ez a h értelmezési tartományán csak úgy lehet, hogy $x = y$. A függvény szürjektív is, mert minden $y \in \mathbb{R}$ esetén az $y = h(x)$ egyenlet megoldható, hiszen $y = x - 1/x \iff x^2 - xy - 1 = 0$. Ebből $x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}$, vagyis mindig két gyök van és itt pontosan az egyik gyök lesz az értelmezési tartomány eleme. Az inverz itt is az $x = h(y)$ egyenletből számolható, y-t kifejezve: $h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $h^{-1}(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$.

(d) A függvény injektív, ugyanis $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$-ból $x = y$ következik. Szürjektív is, ugyanis minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$-hoz van olyan $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, hogy $a = \frac{1}{x}$, éspedig $x = \frac{1}{a}$. Az $y = \frac{1}{x}$ egyenletből x-et kifejezve: $x = \frac{1}{y}$, vagyis k inverze önmaga.

5. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény. Határozzuk meg az $f^{-1}([4,9])$, $f^{-1}([-1,0])$, $f^{-1}([-2,-1])$ halmazokat, ha
   (a) $f(x) = x^2$;
   (b) $f(x) = \sin x$.

   Megoldás. (a) $f^{-1}([4,9]) = [-3,-2] \cup [2,3]$, $f^{-1}([-1,0]) = \{0\}$, $f^{-1}([-2,-1]) = \emptyset$.

   (b) $f^{-1}([4,9]) = \emptyset$, $f^{-1}([-1,0]) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, $f^{-1}([-2,-1]) = \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

6. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvény, $A, B \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmazok.
   (a) Mutassuk meg, hogy
      i. $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$;
      ii. $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
   (b) Adjunk példát arra, hogy a fenti tartalmazásoknál általában nincs egyenlőség! (Nézzük meg az előző feladatot.)

   Megoldás. (a) Legyen $x \in A$, ekkor az őskép definíciója szerint $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, hiszen $f(x) \in f(A)$. Itt általában a két halmaz nem egyenlő, pl. az előző feladatbeli $f(x) = x^2$ függvény és $A = [2,3]$ halmaz esetén $f(A) = [4,9]$, $f^{-1}\big(f(A)\big) = [-3,-2] \cup [2,3] \neq [2,3]$.

   (b) Ha $x \in f\big(f^{-1}(B)\big)$, akkor van olyan $y \in f^{-1}(B)$, hogy $f(y) = x$. Másrészt $y \in f^{-1}(B)$ azt jelenti, hogy $f(y) \in B$, azaz $x \in B$. Általában itt sincs egyenlőség: ha $f(x) = x^2$ és $B = [-1,0]$, akkor $f^{-1}(B) = \{0\}$, $f\big(f^{-1}(B)\big) = f(\{0\}) = \{0\} \neq [-1,0]$.

3. gyakorlat

1. Mivel egyenlők az alábbi számok?

   Megoldás.

$$\log_2 16 = 4, \quad \log_9 3 = \frac{1}{2}, \quad \log_6 6 = 1, \quad \log_6 6^6 = 6, \quad 2^{\log_2 3} = 3, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\pi = 0, \quad \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{29\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{-2010\pi}{4} = -1,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{sgn}\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{2} = -1, \quad \operatorname{sgn}\operatorname{sgn}\cos\sqrt{2010}\pi = -1.$$

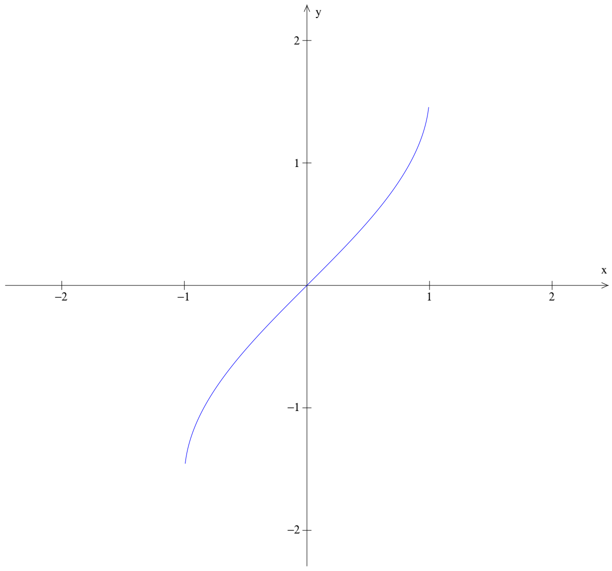
2. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! Melyek lesznek párosak, páratlanok, periodikusak? Mi az értelmezési tartomány?

$$x \mapsto 2x - 5, \quad x \mapsto 6 - x, \quad x \mapsto x^2 - 3, \quad x \mapsto (x-3)^2, \quad x \mapsto 6x - x^2, \quad x \mapsto \operatorname{sgn}(6x - x^2),$$
$$x \mapsto \frac{1}{x+3}, \quad x \mapsto \frac{-2x-11}{x+3}, \quad x \mapsto 2^x, \quad x \mapsto 2^{1-x}, \quad x \mapsto \log_3|x|, \quad x \mapsto 5\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 1,$$
$$x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto \cos 2x, \quad x \mapsto 2\cos\frac{x}{2} - 2, \quad x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto 2\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) + 4, \quad x \mapsto \big|\cos|x|\big|.$$

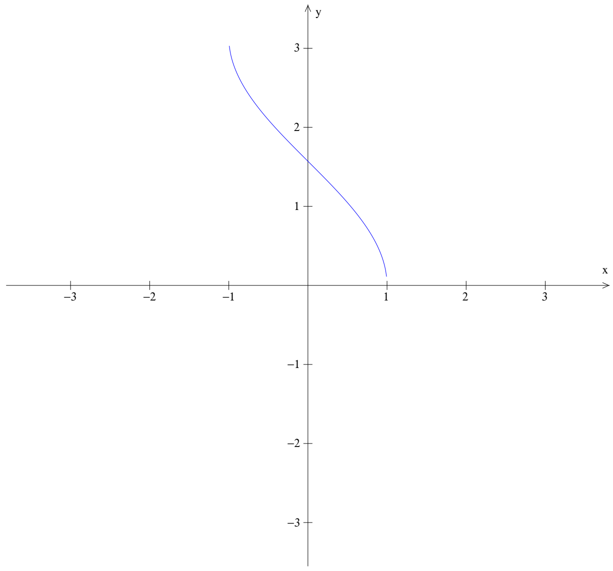
3. Ábrázoljuk a trigonometrikus függvények inverzeit! Mi az értelmezési tartomány és az értékkészlet?

$$\arcsin x = \Big(\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\Big)^{-1}(x), \quad \arccos x = \big(\cos\big|_{[0,\pi]}\big)^{-1}(x),$$
$$\operatorname{arc\,tg} x = \Big(\operatorname{tg}\big|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\Big)^{-1}(x), \quad \operatorname{arc\,ctg} x = \big(\operatorname{ctg}\big|_{(0,\pi)}\big)^{-1}(x).$$

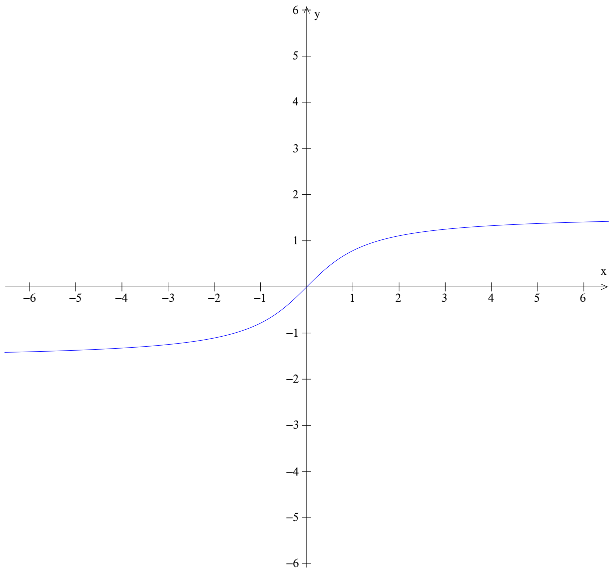
   Megoldás.



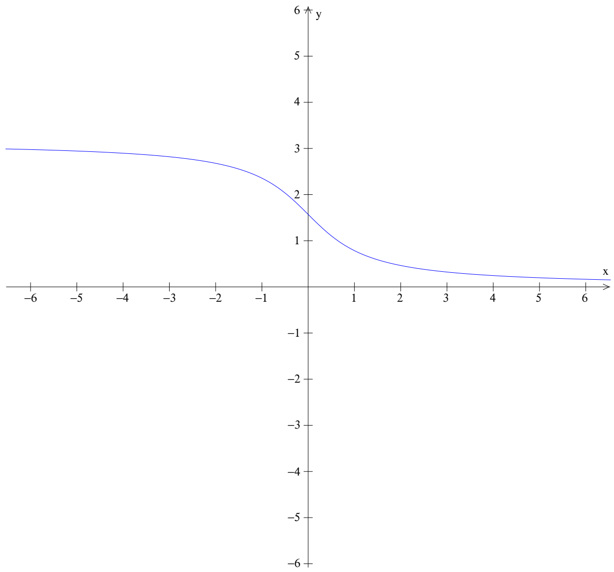
(a) $x \mapsto \operatorname{arc}\sin x$



(b) $x \mapsto \operatorname{arc}\cos x$



(c) $x \mapsto \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$



(d) $x \mapsto \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$

4. gyakorlat

1. Végezzük el az alábbi műveleteket:

$$\text{(a)} \quad (1+i)(3-2i) = ? \qquad \text{(b)} \quad (i-2)(5-3i) = ? \qquad \text{(c)} \quad (1+\sqrt{3}i)^3 = ?$$

$$\text{(d)} \quad 1/i = ? \qquad \text{(e)} \quad (1+i)/(3-2i) = ? \qquad \text{(f)} \quad (5+i)/(1+i) = ?$$

Megoldás. (a) $(1+i)(3-2i) = 3-2i+3i+2 = 5+i$;

(b) $(i-2)(5-3i) = 5i+3-10+6i = -7+11i$;

(c) $(1+\sqrt{3}i)^3 = (1+\sqrt{3}i)^2(1+\sqrt{3}i) = (1-3+2\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i) = 2(\sqrt{3}i-1)(1+\sqrt{3}i) = -8$;

(d) $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{-i}{-i} = \dfrac{-i}{1} = -i$;

(e) $\dfrac{1+i}{3-2i} = \dfrac{1+i}{3-2i}\cdot\dfrac{3+2i}{3+2i} = \dfrac{1+5i}{13}$;

(f) $\dfrac{5+i}{1+i}=\dfrac{5+i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{(5+i)(1-i)}{2}=\dfrac{6-4i}{2}=3-2i.$

2. Határozzuk meg azokat a $c+di$ számokat, melyek négyzete $20i-21$.

Megoldás. A $(c+di)^2=c^2-d^2+2cdi=20i-21$ egyenlőség akkor áll fenn, ha a valós és képzetes részek megegyeznek, azaz $c^2-d^2=-21$ és $2cd=20$. Az ezekből kapott másodfokú egyenletet megoldva $c=2, d=5$, illetve $c=-2, d=-5$ megoldásokat kapjuk.

3. Írjuk fel az alábbi számokat trigonometrikus alakban:

$$\text{(a)}\quad 1+i,\qquad \text{(b)}\quad 1-i,\quad \text{(c)}\quad \sqrt{3}+i,\qquad \text{(d)}\quad -1-\sqrt{3}i.$$

Megoldás.

(a) $1+i=\sqrt{2}\Big(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\Big),$

(b) $1-i=\sqrt{2}\Big(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\Big),$

(c) $\sqrt{3}+i=2\Big(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\Big),$

(d) $-1-\sqrt{3}i=2\Big(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\Big).$

4. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

$$\text{(a)}\quad (1+i)^5=?\qquad \text{(b)}\quad \Big(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)^{2010}=?$$

Megoldás. (a) $(1+i)^5=\Big[\sqrt{2}\Big(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\Big)\Big]^5=\sqrt{32}\Big(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\Big)=-4-4i;$

(b) $\Big(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\Big)^{2010}=\Big(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\Big)^{2010}=\Big(\cos\dfrac{8040\pi}{3}+i\sin\dfrac{8040\pi}{3}\Big)=\Big(\cos 2680\pi+i\sin 2680\pi\Big)=1.$

5. Oldjuk meg az $x^3=1$, $x^4=-4$ és az $x^6=1$ egyenleteket!

Megoldás. (a) $x^3=1 \iff x^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi \iff x=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$ $(k=0,1,2)$, azaz $x_1=\cos 0+i\sin 0=1$, $x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(b) $x^4=-4 \iff x^4=4(\cos\pi+i\sin\pi) \iff x=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4})$ $(k=0,1,2,3)$.

(c) $x^6=1 \iff x^6=\cos 0+i\sin 0) \iff x=\cos\frac{0+2k\pi}{6}+i\sin\frac{0+2k\pi}{6}$ $(k=0,1,2,3,4,5)$.

6. Számítsuk ki i^n-t, ahol $n\in\mathbb{N}$.

Megoldás. $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$ és innentől kezdve ismétlődik, azaz

$$i^n=\begin{cases} 1, & \text{ha } n=4k\\ i, & \text{ha } n=4k+1\\ -1, & \text{ha } n=4k+2\\ -i, & \text{ha } n=4k+3\end{cases}$$

7. (a) Vezessük le a $\sin(\alpha\pm\beta)$-ra és $\cos(\alpha\pm\beta)$-ra tanult addíciós képleteket, felhasználva a komplex számok trigonometrikus alakját.

(b) Fejezzük ki $\cos 3\varphi$-t $\sin\varphi$ és $\cos\varphi$ segítségével.

Megoldás. (a) Legyen $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $w=\cos\beta+i\sin\beta$ két egységhosszúságú komplex szám. Szorozzuk össze őket kétféle módon: $z\cdot w=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+(\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha)i$, a trigonometrikus alakok szorzása után pedig $z\cdot w=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$. A két végeredmény természetesen ugyanaz, ezért a valós és képzetes részük megegyezik. Kicserélve β-t $(-\beta)$-ra kapjuk a másik két azonosságot.

(b) Tekintsük a $\cos\varphi+i\sin\varphi$ komplex számot és emeljük köbre kétféleképpen: $\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=\cos^3\varphi+3\cos^2\varphi i\sin\varphi+3\cos\varphi i^2\sin^2\varphi+i^3\sin^3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi+i(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi)$. Összehasonlítva a kétféle úton kapott eredmény valós részét kapjuk, hogy $\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi$.

5. gyakorlat

1. Mi a határértéke az alábbi (a_n) sorozatoknak? Definíció alapján adott $\varepsilon > 0$-hoz adjunk meg $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindexet is.

$$\text{(a)} \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \text{(b)} \quad a_n = \frac{6n+7}{11n-5}.$$

Megoldás. (a) A sorozat határértéke 0. Legyen ugyanis $\varepsilon > 0$ adott, ekkor

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > 1/\varepsilon \iff n > 1/\varepsilon^2.$$

Tehát az $n_0 := \left[1/\varepsilon^2\right] + 1$ küszöbindex-választás jó lesz.

(b) Ennek a sorozatnak a határértéke $6/11$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, ekkor

$$\left| \frac{6n+7}{11n-5} - \frac{6}{11} \right| = \left| \frac{11 \cdot (6n+7) - 6 \cdot (11n-5)}{121n - 55} \right| = \frac{107}{121n-55} < \varepsilon \iff n > \frac{55}{121} + \frac{107}{121 \cdot \varepsilon},$$

azaz $|a_n - 6/11| < \varepsilon$ teljesül, ha n nagyobb, mint a jobb oldalon álló (ε-tól függő) szám.

2. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét a határérték és a műveletek közötti szabályok segítségével!

$$\text{(a)} \quad 1 + \frac{1}{n}, \qquad \text{(b)} \quad \frac{2}{n}, \qquad \text{(c)} \quad \frac{3}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad \text{(d)} \quad \frac{\sqrt[n]{2}}{n^2+1}.$$

Megoldás. (a) A sorozat a $b_n = 1$ és $c_n = \frac{1}{n}$ sorozatok összege, így a határértéke ezen sorozatok határértékeinek összege: $\lim a_n = 1 + 0 = 1$.

(b) A sorozat a $b_n = \frac{1}{n}$ sorozat kétszerese, így a határértéke a (b_n) sorozat határértékének kétszerese: $\lim a_n = 2 \cdot 0 = 0$.

(c) A sorozat a $b_n = \frac{3}{n}$ és $c_n = 1 + \frac{1}{n}$ sorozatok szorzata, így a határértéke ezen sorozatok határértékeinek szorzata: $\lim a_n = 0 \cdot 1 = 0$.

(a) A sorozat a $b_n = \sqrt[n]{2}$ és $c_n = n^2 + 1$ sorozatok hányadosa, így a határértéke ezen sorozatok határértékeinek hányadosa: $\lim a_n = \frac{1}{+\infty} = 0$.

3. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$\text{(a)} \quad \frac{n+2}{3n-4} \qquad \text{(b)} \quad \frac{2n^2 - 3n - 5}{6 - n^2} \qquad \text{(c)} \quad \frac{\sqrt{n^2+3} + 2n}{3n+5}$$

$$\text{(d)} \quad \frac{3^n - 5 \cdot 2^n}{2 \cdot 3^n + 1{,}8^{n+5}} \qquad \text{(e)} \quad \frac{3^{2n} - 4 \cdot 2^{n+3}}{5^n - 2 \cdot 9^{n+1} + n^6} \qquad \text{(f)} \quad \frac{2n! + 3^n}{5n^2 - 1 + n!}$$

Megoldás. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{3 - \frac{4}{n}} = \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3}.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n - 5}{6 - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}}{\frac{6}{n^2} - 1} = -2.$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3} + 2n}{3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} + 2}{3 + \frac{5}{n}} = \frac{3}{3} = 1.$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 5 \cdot 2^n}{2 \cdot 3^n + 1{,}8^{n+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n}{2 + 1{,}8^5 \cdot 0{,}6^n} = \frac{1}{2}.$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n} - 4 \cdot 2^{n+3}}{5^n - 2 \cdot 9^{n+1} + n^6} = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n - 32 \cdot 2^n}{5^n - 18 \cdot 9^n + n^6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 32 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n - 18 + \frac{n^6}{9^n}} = -\frac{1}{18}.$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n! + 3^n}{5n^2 - 1 + n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3^n}{n!}}{5\frac{n^2}{n!} - \frac{1}{n!} + 1} = \frac{2}{1} = 2.$$

4. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$\text{(a)} \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad \text{(b)} \quad \sqrt{n^2+6n+1} - n.$$

Megoldás. (a) A "$\infty - \infty$"-típusú kifejezést az alábbi módon alakíthatjuk át:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+6n+1} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{\sqrt{n^2+6n+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{6}{2} = 3.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy minden konvergens sorozat korlátos. Igaz-e a megfordítás?

Megoldás. Ha (a_n) konvergens, akkor létezik olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$-ra $|a_n - a| < \varepsilon$. Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$-t, például legyen $\varepsilon = 1$. Ekkor választható hozzá egy olyan n_0 küszöbszám, hogy a sorozatnak a nála nagyobb indexű elemei az $(a-1, a+1)$ intervallumban vannak, azaz ezen az intervallumon kívül legfeljebb véges sok tagja lehet a sorozatnak (az $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}$ lehet kívül). Ha M-mel jelöljük az első $n_0 - 1$ tag maximumát, m-mel a minimumát, akkor a sorozatnak felső korlátja lesz a $\max\{a+1, M\}$ szám, alsó korlátja pedig a $\min\{a-1, m\}$.

A megfordítás nem igaz, az $a_n = (-1)^n$ sorozat korlátos, de nincs határértéke.

6. gyakorlat

A határértékek kiszámításakor jó ötletnek tűnhet, hogy egyszerűen "megpróbálunk behelyettesíteni", de ez általában nem hoz sikert, pl. mert 0/0 típusú erdeményt kapunk. Ilyenkor egy ügyes átalakítás segíthet (algebrai, vagy trigonometrikus azonosságok).

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = ? \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = ? \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = ?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} &= \frac{-1}{-1} = 1; \\
\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+1/2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)}{2(x+1/2)} = \frac{2}{3}; \\
\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10} = ? \qquad \lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10} = ? \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10} = ?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10} &= \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}; \\
\lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10} &= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(-2x+5)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-3}{5-2x} = -\frac{5}{9}; \\
\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{\frac{1}{x}-2+\frac{10}{x^2}} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = ? \qquad \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = ? \qquad \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} = ?$$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{4};$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{1+2x}+3)}=$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}\cdot\frac{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{(x^2-9)\cdot(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 3}\frac{-3}{(x+3)\cdot(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=-\frac{1}{16}.$$

4.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=?\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=?$$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+\ldots+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(x^{n-1}+\ldots+x+1\right)=n;$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^m-1}=n\cdot\frac{1}{m}=\frac{n}{m}.$$

5.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=?\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=?\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=?$$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)\cos x}=\frac{1}{2}.$$

6. Mi legyen A értéke, hogy f folytonos legyen az $x=2$ pontban is?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^3-8}, & \text{ha } x\neq 2\\ A, & \text{ha } x=2.\end{cases}$$

Megoldás. A megadott függvény (amely az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett) akkor lesz folytonos $x=2$-ben, ha az ottani határértéke megegyezik a helyettesítési értékkel. Mivel

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2+2x+4}=\frac{1}{12},$$

ezért f folytonos lesz $x=2$-ben, ha $A=1/12$.

7. gyakorlat

1. Mutassuk meg a definíció alapján, hogy a következő függvények minden $a \in \mathbb{R}$ pontban differenciálhatók és számítsuk is ki a deriváltakat:

$$a)\quad f(x) = x^n,\ n \geq 1 \text{ egész}, \qquad b)\quad h(x) = \sin x$$

Megoldás.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + a^{n-1})}{x-a} = \lim_{x\to a}(x^{n-1} + \ldots + a^{n-1}) = n \cdot a^{n-1};$$

$$h'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2\cdot \cos\frac{x+a}{2} \cdot \sin\frac{x-a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos\frac{x+a}{2} = 1 \cdot \cos a = \cos a.$$

2. Deriváljuk az alábbi függvényeket, felhasználva a deriválási szabályokat.

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\left(2 + x - x^2\right)' &= 1 - 2x,\\
\left(a^5 + 5a^3x^2 - x^5\right)' &= 10a^3x - 5x^4,\\
((x-a)(x-b))' &= 1\cdot(x-b) + (x-a)\cdot 1 = 2x - a - b,\\
\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' &= \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2},\\
(\sqrt{x})' &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}},\\
\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right),\\
\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)' &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right),\\
\left(x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)' &= 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},\\
\left((1-x)\left(1-x^2\right)^2\left(1-x^3\right)^3\right)' &= -\left(1-x^2\right)^2\left(1-x^3\right)^3 - 4x(1-x^2)(1-x)\left(1-x^3\right)^3 -\\
&\quad - 9x^2(1-x)\left(1-x^2\right)^2\left(1-x^3\right)^2,\\
(\cos 2x - 2\sin x)' &= -(\sin 2x)\cdot 2 - 2\cdot\cos x,\\
((x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha))' &= \sin\alpha(x\cos\alpha - \sin\alpha) + \cos\alpha(x\sin\alpha + \cos\alpha) = x\sin 2\alpha + \cos 2\alpha,\\
\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}\right)' &= \frac{2\sin x\cos x\sin x^2 - 2x\sin^2 x\cos x^2}{\sin^2 x^2}\\
\left(e^{-x^2}\right)' &= \left(e^{-x^2}\right)\cdot(-2x),\\
(\ln\ln\ln x)' &= \frac{1}{\ln\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x},\\
\left(\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' &= \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}.
\end{aligned}$$

3. Legyen $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Mi lesz $f'(0)$?

Megoldás. Mivel külön-külön mindegyik tényező deriválja 1, a szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabály szerint a derivált egy öttagú összeg lesz, minden tagból pontosan az egyik tényező "hiányzik" (amikor őt deriváljuk, a többihez pedig nem nyúlunk). Az öt tag mindegyikében fog szerepelni az x-es szorzó, kivéve egyet. Emiatt $f'(0) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\big|_{x=0} = 24$.

4. Az inverzfüggvény deriválási szabályát használva számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját (ahol értelmes):

$$\text{(a)}\quad f(x) = \sqrt[n]{x}, \qquad \text{(b)}\quad g(x) = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Megoldás. Mivel az x^n, illetve a $\operatorname{tg} x$ függvények deriváltját már tudjuk, az inverzfüggvény deriválási szabálya szerint

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'\Big|_{x=b} = \frac{1}{n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot b^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\cdot b^{\frac{1}{n}-1}.$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)'\Big|_{x=b} = \frac{1}{\operatorname{tg}'(a)}\Big|_{a=\operatorname{arc\,tg} b} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 a}}\Big|_{a=\operatorname{arc\,tg} b} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(a)}\Big|_{a=\operatorname{arc\,tg} b} = \frac{1}{1+b^2}.$$

5. Mennyi az $f(x) = \sin x + x$ függvény inverzének deriváltja a $b = 1 + \frac{\pi}{2}$ pontban?

Megoldás. Ha f invertálható, differenciálható az a pontban és $f'(a) \neq 0$, akkor f^{-1} differenciálható a $b = f(a)$ pontban és $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$. Ezt alkalmazva

$$\left(f^{-1}\right)'\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{f'(\pi/2)} = \left.\frac{1}{1 + \cos x}\right|_{x=\pi/2} = 1.$$

8. gyakorlat

1. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot!

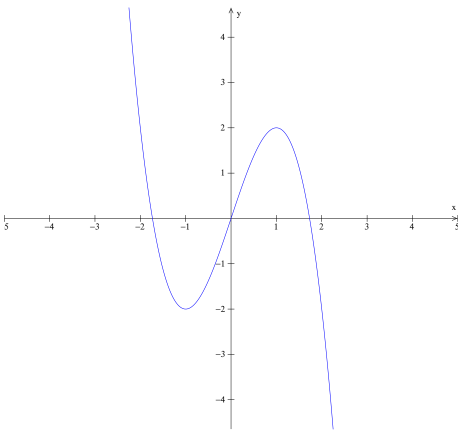
(a) $f(x) = 3x - x^3$, (b) $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, (c) $h(x) = x + \dfrac{1}{x}$, (d) $k(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Megoldás.

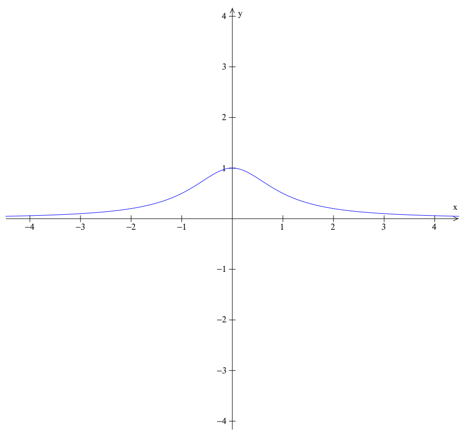
(a) A függvény egész $\mathbb{R}$-en értelmezett, zérushelye van a $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ pontokban, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. $f'(x) = 3 - 3x^2$, $f''(x) = -6x$, $f'''(x) = -6$. A derivált zérushelyei (lehetséges lokális szélsőértékhelyek): $-1, 1$, a második derivált zérushelyei (lehetséges inflexiós pontok): 0. Mivel f polinom, ezért mindenhol folytonos. Az alábbi táblázat segít eldönteni f alaki tulajdonságait:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$ konvex	lokális minimum	$\nearrow$ konvex	inflexiós pont	$\nearrow$ konkáv	lokális maximum	$\searrow$ konkáv

A derivált mindkét zérushelyén lokális szélsőérték van, mert ott a második derivált nem nulla. Az $x = 0$-ban inflexiós pont van, mert a harmadik derivált ott nem nulla (illetve a 0-ban a függvény konvexből konkávba vált át). A rajzhoz még számoljuk ki a függvényértékeket az $x = \pm 1$-ben, azaz a lokális minimum és maximum értékeit: $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$. A függvény értékkészlete az egész $\mathbb{R}$.



(e) $f(x) = 3x - x^3$



(f) $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(b) A g függvény mindenhol értelmezett, nincs zérushelye, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Rövid számolással adódik, hogy $g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $g''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. Ennek megfelelően a derivált zérushelye az $x = 0$, a második derivált zérushelyei az $x = -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$ pontok.

Valóban inflexiós pontokról van szó, mert a függvény konvexből konkávba vált azokban a pontokban. A függvény értékei az inflexiós pontokban, illetve a lokális szélsőértékhelyen: $f(0) = 1$, $f(\pm 1/\sqrt{3}) = 3/4$. A függvény egy racionális törtfüggvény, amely mindenhol értelmezett, így mindenhol folytonos. Mivel zérushely nincs, a végtelenbeli limeszekből és a szélsőértékhelyen felvett értékből a folytonsság miatt következik, hogy g értékkészlete a $(0, 1]$ intervallum.

x	$(-\infty,-1/\sqrt{3})$	$-1/\sqrt{3}$	$(-1/\sqrt{3},0)$	0	$(0,1/\sqrt{3})$	$1/\sqrt{3}$	$(1/\sqrt{3},\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ konvex	inflexiós pont	$\nearrow$ konkáv	lokális maximum	$\searrow$ konkáv	inflexiós pont	$\searrow$ konvex

(c) A h függvény mindenhol értelmezett, kivéve az $x=0$ pontot. Ettől a ponttól eltekintve mindenhol máshol folytonos. Zérushelye nincs. $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0-} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} h(x) = \infty$. Az első és második deriváltak: $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $h''(x) = \frac{2}{x^3}$. A derivált zérushelyei: -1 és 1, a második deriváltnak nincs zérushelye.

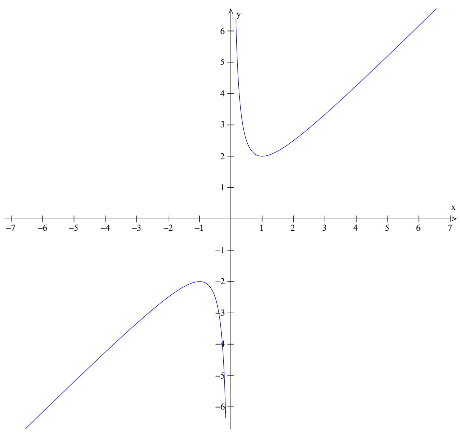
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ konkáv	lokális maximum	$\searrow$ konkáv	nincs értelmezve	$\searrow$ konvex	lokális minimum	$\nearrow$ konvex

$h(-1) = -2$, $h(1) = 2$. A végtelenbeli és a szakadási pontbeli határértékeket figyelembevéve, a függvény értékkészlete a $(-\infty,-2] \cup [2,\infty)$ halmaz.

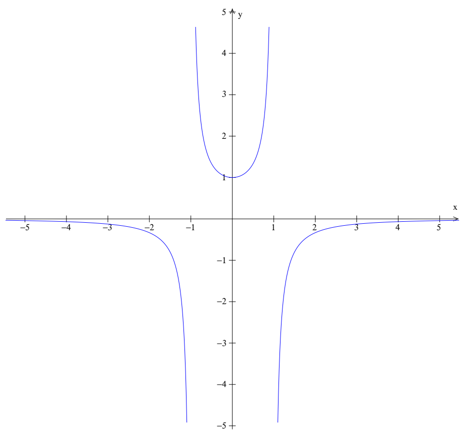
(d) A k függvény értelmezési tartománya a $D(k) = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ halmaz, továbbá $D(k)$ minden pontjában folytonos. A limeszek $\pm\infty$-ben és ±1-ben: $\lim_{x\to\pm\infty} k(x) = 0$, $\lim_{x\to 1+} k(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1-} k(x) = \infty$, $\lim_{x\to -1+} k(x) = \infty$, $\lim_{x\to -1-} k(x) = -\infty$. Zérushely nincs, $k(0) = 1$. A deriváltak: $k'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$, $k''(x) = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$. A derivált egyetlen zérushelye $x = 0$, a második deriváltnak nincs zérushelye $D(k)$-ban.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$	$+$	$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$ konkáv	nincs értelmezve	$\searrow$ konvex	lokális minimum	$\nearrow$ konvex	nincs értelmezve	$\nearrow$ konkáv

A 0-ban lokális minimum van, mert a második derivált pozitív, a minimum értéke $k(0) = 1$, ez viszont nem globális minimum, hiszen a szakadási pontokban van $-\infty$ határérték is. Az értékkészlet az $R(k) = (-\infty, 0) \cup [1,\infty)$ halmaz.



(g) $h(x) = x + 1/x$



(h) $k(x) = \frac{1}{1-x^2}$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális és globális szélsőértékhelyeit!

$$\text{(a)} \quad f(x) = 2x - x^4, \qquad \text{(b)} \quad g(x) = e^x \sin x.$$

Megoldás. (a) $f'(x) = 2 - 4x^3$, ennek a zérushelye $x_0 = 1/\sqrt[3]{2}$. Tehát ebben a pontban *lehet* lokális szélsőértékhely. Mivel $f''(x_0) < 0$, ezért x_0-ban lokális maximum van, a maximum értéke $f(x_0) \approx 1,19$. Ez egyben globális maximum is, mert a függvény limesze a $\pm\infty$-ben $-\infty$.

(b) $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$, $f''(x) = 2e^x \cos x$. Ott lehet lokális szélsőértékhely, ahol $f'(x) = 0$, azaz az $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ pontokban ($k \in \mathbb{Z}$). A második derivált előjele ezekben a pontokban páros k-ra negatív, páratlan k-ra pozitív. Ebből következően f-nek lokális maximuma van az $x = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi$ helyeken és lokális minimuma van az $x = \frac{3\pi}{4} + (2l+1)\pi$ pontokban ($l \in \mathbb{Z}$). A függvénynek azonban nincs globális maximuma, illetve minimuma, mert f értékei a lokális maximumhelyeken végtelenhez tartanak, a minimumhelyeken felvett értékei pedig $-\infty$-hez. Például a maximumhelyeken

$$f(x_{\max}^{(l)}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4} + 2l\pi} \to \infty, \text{ ha } l \to \infty.$$

3. (a) Egy $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ függvényre $f'(0) = 0$. Igaz-e, hogy a 0-ban lokális szélsőértéke van?

   (b) Egy $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ függvényre $f''(0) = 0$. Igaz-e, hogy a 0-ban inflexiós pontja van?

   Megoldás. Egyik sem igaz. Az első esetben az $f(x) = x^3$ függvény szigorúan monoton növő, így nyilván nincs lokális szélsőértéke az $x = 0$-ban, bár ott a deriváltja 0. A (b) részhez az $f(x) = x^4$ függvényre $f''(0) = 0$, de sehol sincs inflexiós pontja, hiszen végig konvex.

4. Írjuk fel az $f(x) = \cos x + \dfrac{2}{x^2}$ függvény érintőjének egyenletét az $x_0 = 2$ pontban.

   Megoldás. Az érintő egyenlete az x_0 pontban: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Mivel $f'(x) = -\sin x - \frac{4}{x^3}$ és $f(2) = \cos 2 + 1/2$, ezért a keresett érintő egyenlete

$$y = -\left(\sin 2 + \frac{1}{2}\right)(x - 2) + \cos 2 + \frac{1}{2}.$$

5. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait.

   Megoldás.

$$\begin{aligned}
(x^x)' &= \left(e^{x \cdot \ln x}\right)' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(\ln x + \frac{x}{x}\right) = x^x \cdot (\ln x + 1),\\
(\ln \sin x)' &= \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x,\\
(\log_x e)' &= \left(\frac{\ln e}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x},\\
\left(\ln\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)\right)' &= \frac{1}{\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)} \cdot \left(e^x + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} \cdot e^{2x} \cdot 2\right),
\end{aligned}$$

$$\left(\operatorname{arc\,tg}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right)' = \frac{1}{1 + \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{\frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}}}{2\sqrt{1 + x^2}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

6. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \le 1 \\ ax + b, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

   Hogyan kell megválasztani a és b értékét, ha azt akarjuk, hogy f differenciálható legyen $x_0 = 1$-ben is?

   Megoldás. A függvény két részből van összerakva, egy paraboladarabból és egy félegyenesből áll. Azt szeretnénk, hogy a függvénygrafikon két része "csatlakozzon" (azaz f legyen folytonos) és a két darab illeszkedése legyen "sima", ne törjön meg (azaz legyen f differenciálható). A folytonossághoz az kell, hogy a jobb és bal oldali határértékek megegyezzenek, azaz

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to 1-} x^2 = 1 = a + b = \lim_{x \to 1+} (ax + b) = \lim_{x \to x_0 +} f(x),$$

   azaz $1 = a + b$-nek teljesülnie kell, hogy f egyáltalán folytonos legyen. A másik követelmény a jobb és bal oldali deriváltak egyezése, azaz

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 = a = \lim_{x \to 1+} \frac{ax + b - (a + b)}{x - 1} = f'_+(1),$$

   azaz $a = 2$ és $b = 1 - a = 1 - 2 = -1$.

9. gyakorlat

1. Írjuk fel az alábbi függvények n-edfokú x_0-körüli $T_{n,x_0}(x)$ Taylor-polinomját.

(a) $f(x) = e^x$, $T_{6,0}(x) =?$

(b) $g(x) = \sqrt{1+x}$, $T_{2,0}(x) =?$

(c) $h(x) = x^x$, $T_{2,1}(x) =?$

Megoldás.

$$T_{f,\,6,\,0}(x) = \sum_{n=0}^{6} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{6} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!};$$

$$T_{g,\,2,\,0}(x) = \sum_{n=0}^{2} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8};$$

$$T_{h,\,2,\,1}(x) = \sum_{n=0}^{2} \frac{h^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = 1 + \frac{1}{1!}\cdot(x-1) + \frac{2}{2!}\cdot(x-1)^2.$$

2. Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora hibát követünk el az alábbi közelítő formulával:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \qquad \left(x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right).$$

Megoldás. Használjuk a Taylor-formula Lagrange-maradéktagos alakját. Eszerint ha f legalább $(n+1)$-szer differenciálható az a pont egy környezetében, akkor

$$f(x) = T_{f,\,n,\,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ahol ξ egy a és x közötti érték. Az $f = \sin$ függvény akárhányszor differenciálható és a megadott közelítő formula éppen $T_{f,\,3,\,0}(x)$, sőt, mivel a függvény negyedik deriváltja a 0-ban $\sin 0 = 0$, ezért valójában $x - \frac{x^3}{6} = T_{f,\,4,\,0}(x)$ is igaz. Mivel $|x| \le 1/2$, ezért

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| = |f(x) - T_{f,\,4,\,0}(x)| = \left|\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5\right| \le \frac{1}{5!}\left|x^5\right| \le \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{3840}.$$

3. Számoljuk ki e értékét legalább 4 tizedesjegy pontossággal csak a négy alapművelet felhasználásával!

Megoldás. Az e^x már kiszámolt Taylor-sorát használva

$$|e^x - T_{n,\,0}(x)| = \left|\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4} \Leftrightarrow (n+1)! > 3\cdot 10^4 \Leftrightarrow n+1 \ge 8 \Leftrightarrow n \ge 7.$$

Tehát e egy jó közelítő értéke:

$$\hat{e} = T_{n,\,0}(1) = \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = 2,718253968,$$

ami a pontosabb $e = 2,718281828$ értékkel összehasonlítva az első 4 tizedesjegyben valóban megegyezik.

4. Számítsuk ki az alábbi határértékeket L'Hospital-szabállyal.

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} =? \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} =? \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3} =?$$

$$\text{(d)} \quad \lim_{x\to 0+} x\log x =? \qquad \text{(e)} \quad \lim_{x\to 0+} x^x =? \qquad \text{(f)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log\cos ax}{\log\cos bx} =?$$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b};$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}x+\cos x}{2}=1;$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{6}=\frac{1}{6};$$
$$\lim_{x\to 0+}x\log x=\lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{1/x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0;$$
$$\lim_{x\to 0+}x^x=\lim_{x\to 0}e^{x\log x}=e^0=1;$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos ax}{\log\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos ax}(-\sin ax)a}{\frac{b}{\cos bx}(-\sin bx)b}=\lim_{x\to 0}\frac{a\operatorname{tg}ax}{b\operatorname{tg}bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\frac{1}{\cos^2 ax}}{b^2\frac{1}{\cos^2 bx}}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\cos^2 bx}{b^2\cos^2 ax}=\frac{a^2}{b^2}.$$

10. gyakorlat

1. Az alapintegrálok felhasználásával számoljuk ki a primitív függvényeket.

   Megoldás.

$$\int\sqrt[3]{x^2}\ \mathrm{d}x=\int x^{2/3}\ \mathrm{d}x=\frac{x^{5/3}}{5/3}+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C;$$
$$\int\frac{\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}}\ \mathrm{d}x=\int\frac{x^{3/10}}{x^{1/6}}\ \mathrm{d}x=\int x^{2/15}\ \mathrm{d}x=\frac{x^{17/15}}{17/15}+C=\frac{15}{17}\sqrt[15]{x^{17}}+C;$$
$$\int(6\sin x+5\cos x)\ \mathrm{d}x=6\int\sin x\ \mathrm{d}x+5\int\cos x\ \mathrm{d}x=-6\cos x+5\sin x+C;$$
$$\int\operatorname{tg}^2 x\ \mathrm{d}x=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x-\int 1\ \mathrm{d}x=\operatorname{tg}x-x+C;$$
$$\int\frac{5\cos 2x}{\sin x+\cos x}\ \mathrm{d}x=5\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x+\sin x}\ \mathrm{d}x=5\int(\cos x-\sin x)\ \mathrm{d}x=5(\sin x+\cos x)+C;$$
$$\int\frac{-5}{2+2x^2}\ \mathrm{d}x=-\frac{5}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x=-\frac{5}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C$$

2. Az $\int f(ax+b)\ \mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$ formulát használva számítsuk ki a primitív függvényeket.

   Megoldás.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+a}=\ln|x+a|+C;$$
$$\int(2x-3)^{10}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{(2x-3)^{11}}{11}+C=\frac{(2x-3)^{11}}{22}+C;$$
$$\int\frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\ \mathrm{d}x=\int(1-x)^{-3/5}\ \mathrm{d}x=-\frac{(1-x)^{2/5}}{2/5}+C=-\frac{5}{2}(1-x)^{2/5}+C$$

3. Számoljuk ki az alábbi $f^n(x)f'(x)$ és $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú integrandusok primitív függvényét.

   Megoldás.

$$\int x^2(2x^3+4)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int 6x^2(2x^3+4)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\frac{(2x^3+4)^2}{2} + C = \frac{(2x^3+4)^2}{12} + C;$$

$$\int \sin x \cos x\ \mathrm{d}x = \frac{\sin^2 x}{2} + C;$$

$$\int \sin^4 x \sin 2x\ \mathrm{d}x = 2\int \sin^5 x \cos x\ \mathrm{d}x = 2\frac{\sin^6 x}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{3} + C;$$

$$\int \frac{4\sin x}{5\cos x + 4}\ \mathrm{d}x = -\frac{4}{5}\int \frac{-5\sin x}{5\cos x + 4}\ \mathrm{d}x = -\frac{4}{5}\ln|5\cos x + 4| + C;$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1/x}{\ln x}\ \mathrm{d}x = \ln|\ln x| + C.$$

4. Primitív függvény kiszámítása parciális integrálással.

Megoldás.

$$\int xe^{-x}\ \mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\ \mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + C;$$

$$\int x\cos x\ \mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\ \mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C;$$

$$\int \ln x\ \mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln x\ \mathrm{d}x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = x\ln x - x + C;$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\ \mathrm{d}x = \int 1\cdot\operatorname{arc\,tg} x\ \mathrm{d}x =$$

$$= x\operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C;$$

$$\int e^{2x}\operatorname{sh}(4x)\ \mathrm{d}x = \frac{e^{2x}}{2}\operatorname{sh}(4x) - 2\int e^{2x}\operatorname{ch}(4x)\ \mathrm{d}x = \frac{e^{2x}}{2}\operatorname{sh}(4x) - 2\left(\frac{e^{2x}}{2}\operatorname{ch}(4x) - 2\int e^{2x}\operatorname{sh}(4x)\ \mathrm{d}x\right) =$$

$$= e^{2x}\left(\frac{\operatorname{sh}(4x)}{2} - \operatorname{ch}(4x)\right) + 4\int e^{2x}\operatorname{sh}(4x)\ \mathrm{d}x.$$

A kapott egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$\int e^{2x}\operatorname{sh}(4x)\ \mathrm{d}x = -\frac{e^{2x}}{3}\left(\frac{\operatorname{sh}(4x)}{2} - \operatorname{ch}(4x)\right) + C.$$

11. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat alkalmas helyettesítéssel.

Megoldás.

A $t = \sqrt{x}$ helyettesítéssel $x = t^2 \Rightarrow\ \mathrm{d}x = 2t\ \mathrm{d}t$, így

$$\int e^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int e^t\cdot 2t\ \mathrm{d}t = 2\left(te^t - \int e^t\ \mathrm{d}t\right) = 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C;$$

A $t = (2/3)x$ helyettesítéssel $x = (3/2)t \Rightarrow\ \mathrm{d}x = 3/2\ \mathrm{d}t$, így

$$\int \frac{1}{\sqrt{36-16x^2}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}} = \frac{1}{6}\int \frac{3/2}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\arcsin t + C = \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{2}{3}x\right) + C;$$

A $t=\sqrt{x}$ helyettesítéssel $x=t^2 \Rightarrow \ \mathrm{d}x = 2t\ \mathrm{d}t$, így

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{2t}{1+t}\ \mathrm{d}t = \int 2 - \frac{2}{1+t}\ \mathrm{d}t = 2t - 2\ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C;$$

A $t=x/5$ helyettesítéssel $x=5t \Rightarrow \ \mathrm{d}x = 5\ \mathrm{d}t$, így

$$\int \frac{1}{25+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{25}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{25}\int \frac{5}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{5}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{5}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{5}\right) + C;$$

A $t=e^x$ helyettesítéssel $x=\ln t \Rightarrow \ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$, így

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int 1 - \frac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t = t - \ln|1+t| + C = e^x - \ln(e^x+1) + C;$$

A $t=\arcsin x$ helyettesítéssel $x=\sin t \Rightarrow \ \mathrm{d}x = \cos t\ \mathrm{d}t$, így

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\ \mathrm{d}t = \int \cos^2 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1+\cos 2t\ \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C;\end{aligned}$$

A $t=\sqrt[3]{1+x^3}$ helyettesítéssel $x=\sqrt[3]{t^3-1} \Rightarrow \ \mathrm{d}x = (t^3-1)^{-2/3}\cdot t^2\ \mathrm{d}t$, így

$$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\ \mathrm{d}x = \int (t^3-1)^{2/3} t\cdot t^2 (t^3-1)^{-2/3}\ \mathrm{d}t = \int t^3\ \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\left(1+x^3\right)^{4/3} + C;$$

A $t=x-1$ helyettesítéssel $x=t+1 \Rightarrow \ \mathrm{d}x = \ \mathrm{d}t$, így

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{(t+1)^3}{t^{100}}\ \mathrm{d}t = \int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^{100}}\ \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{97}} + 3\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{98}} + 3\int \frac{dt}{t^{99}} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{100}} = \\ &= -\frac{1}{96}\cdot\frac{1}{t^{96}} - \frac{3}{97}\cdot\frac{1}{t^{97}} - \frac{3}{98}\cdot\frac{1}{t^{98}} - \frac{1}{99}\cdot\frac{1}{t^{99}} + C = \\ &= -\left(\frac{1}{96}\cdot\frac{1}{(x-1)^{96}} + \frac{3}{97}\cdot\frac{1}{(x-1)^{97}} + \frac{3}{98}\cdot\frac{1}{(x-1)^{98}} + \frac{1}{99}\cdot\frac{1}{(x-1)^{99}}\right) + C;\end{aligned}$$

A $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ és az $\operatorname{sh} x = 2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$ azonosságokból kapjuk, hogy $\operatorname{sh} x = \dfrac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$. A $t=\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$ helyettesítéssel $x = 2\operatorname{ar\,th} x \Rightarrow \ \mathrm{d}x = \dfrac{2}{1-t^2}\ \mathrm{d}t$, $\operatorname{sh} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, így

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh} x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1-t^2}\ \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C;$$

A $t=\ln x$ helyettesítéssel $x=e^t \Rightarrow \ \mathrm{d}x = e^t\ \mathrm{d}t$, így

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln x)\ \mathrm{d}x &= \int e^t\cdot\sin t\ \mathrm{d}t = e^t\sin t - \int e^t\cos t\ \mathrm{d}t = e^t\sin t - \left(e^t\cos t + \int e^t\sin t\ \mathrm{d}t\right) = \\ &= e^t(\sin t - \cos t) - \int e^t\sin t\ \mathrm{d}t;\end{aligned}$$

amiből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\int e^t\cdot\sin t\ \mathrm{d}t = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + C,$$

amiből adódik az eredeti feladat megoldása:

$$\int \sin(\ln x)\ \mathrm{d}x = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C;$$

A $t = \sqrt{x}$ helyettesítéssel $x = t^2 \Rightarrow \ \mathrm{d}x = 2t \ \mathrm{d}t$, így

$$\begin{aligned}
\int x \sin \sqrt{x} \ \mathrm{d}x = \int 2t^3 \sin t \ \mathrm{d}t = 2 \left(-t^3 \cos t + 3 \int t^2 \cos t \ \mathrm{d}t \right) = \\
= -2t^3 \cos t + 6 \left(t^2 \sin t - 2 \int t \sin t \ \mathrm{d}t \right) = \\
= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t - 12 \left(-t \cos t + \int \cos t \ \mathrm{d}t \right) = \\
= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t + 12t \cos t - 12 \sin t + C = \\
= \cos \sqrt{x} \left(-2\sqrt{x^3} + 12\sqrt{x} \right) + \sin \sqrt{x}(6x - 12) + C;
\end{aligned}$$

Legyen $(2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi$, ekkor a $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ helyettesítéssel $x = 2 \operatorname{arc\,tg} t \Rightarrow \ \mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2} \ \mathrm{d}t$, így

$$\int \frac{1}{1+\cos x} \ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} \ \mathrm{d}t = \int 1 \ \mathrm{d}t = t + C = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$