Egzakt és egzakttá tehető differenciálegyenletek megoldása

Segédanyag Differenciálegyenletek (geológusoknak) c. gyakorlathoz

Az egzakt vagy egzakttá tehető differenciálegyenleteket gyakran a következő alakban írjuk fel:

$$y'(x) = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}, \tag{1}$$

ami átírható a szokásos

$$g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

alakú egyenletté. Ekkor a differenciálegyenlet egzakt, ha

$$\partial_y g(x,y) = \partial_x h(x,y) \tag{3}$$

teljesül. Az egyenlet egzakttá tehető, ha létezik $\mu(x,y) \neq 0$ függvény, amivel beszorozva az egyenlet már egzat. Gyakorlaton láttunk két speciális esetet, amikor a differenciálegyenlet egzakttá tehető, ezekben az esetekben meg is határoztuk a $\mu(x,y)$ úgynevezett integráló tényezőt.

Ha egy differenciálegyenlet egzakt (vagy egzakttá tehető), akkor létezik egy $F(x,y)$ függvény, amelyre

$$\partial_x F(x,y) = g(x,y) \quad \textit{és} \quad \partial_y F(x,y) = h(x,y) \tag{4}$$

teljesül, és ekkor a megoldás $F(x,y) = C$ alakban írható fel, ahol $C \in \mathbb{R}$. Az F függvény meghatározására az alábbi módszert tanultuk: kifejezzük F-et pl. g segítségével, azaz

$$F(x,y) = \int g(x,y)\,\mathrm{d}x + c(y), \tag{5}$$

ekkor a $\partial_y F(x,y) = h(x,y)$ második feltételt használva kiszámoljuk $c(y)$-t (amire egy egyszerű differenciálegyenletet kapunk); vagy kifejezzük F-et h segítségével és ekkor $c(x)$-et fogjuk meghatározni a $\partial_x F(x,y) = g(x,y)$ első feltétel felhasználásával. Azonban eljárhatunk a következőképpen is: kiszámoljuk F-et mind g, mind h segítségével és összehasonlítjuk a kapott F függvényeket, amiből egyszerűen meg tudjuk határozni $c(x)$-et és $c(y)$-t:

$$F(x,y) = \int g(x,y)\,\mathrm{d}x + c(y), \tag{6}$$

$$F(x,y) = \int h(x,y)\,\mathrm{d}y + c(x). \tag{7}$$