

Többváltozós analízis 1. gyakorlat

3. csoport, péntek 14–16

1. gyakorlat (szeptember 15.)

- A gyakorlaton emlékeztettem az improprius integrál motivációjára, továbbá arra, hogy mit jelent, hogy egy f függvény $[a, b)$ -n vett improprius integrálja konvergens. Közösen megoldottuk az 5.223 feladatot.
- Önálló munka során az 5.220 és 5.224–5.238 feladatokkal foglalkoztunk, közben megbeszéltük a nevezetes integrálási szabályokat.
- HF: ami kimaradt az önálló munka során.

2. gyakorlat (szeptember 22.)

- HF-ok megbeszélése: 5.221 és 5.233.
- Megbeszéltünk (az előző órán felírt) két példatárban nem szereplő feladatot:
 1. Igazoljuk, hogy ha az f, g függvények a $(0, 1]$ -en lokálisan integrálhatóak és $\int_0^1 f, \int_0^1 g$ integrálok konvergens, akkor $\int_0^1 (f + g)$ is konvergens.
 2. Mi a logikai kapcsolat a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ függvényhatárérték és az $\int_1^{\infty} f$ improprius integrál között?
- Emlékeztettem a majorizációs/minorizációs elvre, ahol HF meggondolni, hogy a feltételben szereplő abszolútérték nem hagyható el.
- A majorizációs/minorizációs elvet alkalmazva a következő feladatokat mutattam meg a táblánál: 5.239 és $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} dx$.
- Önálló munka során az 5.240, 5.242, 5.244, 5.245, 5.246 feladatokkal foglalkoztunk.
- HF: ami kimaradt az önálló munka során.

3. gyakorlat (szeptember 29.)

- röpZH.

- Kérdések megbeszélése: 5.247 ($\sin x \leq x$ becsléssel és $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ határértékkel is).
- A gyakorlaton emlékeztettem a sorok konvergenciájára vonatkozó integráalkritériumra, ezt követően a következő két feladatot oldottuk meg: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$. Utóbbi feladattal kapcsolatban megbeszéltük, hogy az 5.241 feladatnál miért nem alkalmazható a majorizációs/minorizációs elv.
- Emlékeztettem a hatványsorokra vonatkozó legfontosabb definíciókra (hatványsor, konvergencia-halmaz, összegfüggvény).
- A 7.45-ös feladatban kétféleképpen is meghatároztuk a konvergenciahalmazt, önálló munka során a 7.49, 7.50, 7.52 feladatokkal foglalkoztunk.
- A 7.70 és 7.71-es feladatokban meghatároztuk az összegfüggvényt, önálló munka során a 7.72 és 7.75 feladatokkal foglalkoztunk (ahol azt a segítséget adtam, hogy emlékezzünk, hogy hogyan írtuk fel előadáson a $\log(1+x)$ függvényt hatványsor alakban).
- HF: ami kimaradt az önálló munka során.

4. gyakorlat (október 6.)

- röpZH.
- HF-ok megbeszélése: 7.72, 7.75 (kétféleképpen).
- Sokadik deriváltra vonatkozó feladatokat oldottunk meg: 7.116 (háromféleképpen), 7.117.
- HF: 7.118 (sokadik derivált), 7.106–110 (elmélet), 7.125.

5. gyakorlat (október 13.)

- röpZH.
- HF-ok megbeszélése: 7.118.
- Önálló munka során a következő feladatokkal foglalkoztunk: $B(a, r)$ felírása abszolútérték nélkül \mathbb{R} -ben és \mathbb{R}^2 -ben; $(\sin n\pi, \cos n\pi)$ konvergencia-e? $(\cos n, \sin n)$ tarthat-e a $(0, 0)$ -hoz? határérték és műveletek (összeg, skalárszoros, skalárszorzat) kapcsolata; $a_n \rightarrow a$ és $|a_n| \rightarrow |a|$ kapcsolata?

6. gyakorlat (október 20.)

- Konzultáció.

7. gyakorlat (október 27.)

- 1. ZH.

8. gyakorlat (november 10.)

- 1. ZH megbeszélése.
- A 8.6-os feladatot beszéltük meg a táblánál, önálló munka során a következő feladatokkal foglalkoztunk: 8.17, 8.7, 8.10, 8.25, 8.26.
- Egyéb feladatokkal is foglalkoztunk:
 1. Az $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ és $B = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ számhalmazok belső, külső, határpontjai, torlódási pontjai, nyíltsága, zártsága.
 2. Mutassuk meg, hogy $\text{int}H$, $\text{ext}H$ nyílt, ∂H zárt tetszőleges H halmaz esetén.
 3. Lehet-e végtelen sok nyílt halmaz metszete nem nyílt? Lehet-e végtelen sok zárt halmaz uniója nem zárt?
- HF: ami kimaradt az önálló munka során.

9. gyakorlat (november 17.)

- röpZH.
- HF-ok megbeszélése: 8.10 és egyéb feladatok közül 1.
- Szintvonalak: a 8.43 és 8.45 feladatokat beszéltük meg, önálló munka során a 8.47 és 8.49 feladatokkal foglalkoztunk.
- Függvényhatárérték és folytonosság: a 8.76-os 8.81-es a) feladatokat beszéltük meg a táblánál, önálló munka során a 8.68, 8.79, 8.83, 8.81 és $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$ feladatokkal foglalkoztunk.
- HF: ami kimaradt az önálló munka során.

10. gyakorlat (november 24.)

- HF-ok megbeszélése: 8.81 b) c), 8.83.
- Parciális deriválás: a 8.88-as feladatot beszéltük meg a táblánál, önálló munka során a 8.93, 8.96, 8.102 feladatokkal foglalkoztunk.
- Logika és parciális derivált: önálló munka során a 8.103, 8.104 feladatokkal foglalkoztunk.
- Szélsőérték-feladatok: önálló munka során az előadáson tárgyalt $xy(1 - x^2 - y^2)$ a zárt egységkör-lapon, 8.157, $\sin x \sin y \sin z$ legnagyobb értéke, ha x, y, z egy háromszög szögei feladatokkal foglalkoztunk.
- HF: ami kimaradt az önálló munka során.

11. gyakorlat (december 1.)

- röpZH.
- HF-ok megbeszélése: 8.102, $\sin x \sin y \sin z$ legnagyobb értéke, ha x, y, z egy háromszög szögei.
- Totális derivált: a következő feladatokkal foglalkoztunk (1–3. megbeszélve):

1. Differenciálható-e az $f(x, y) = x + 2y$ függvény a $(2, 1)$ pontban?
2. Differenciálható-e az $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény a $(0, 0)$ pontban?
3. Differenciálható-e az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+2y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény a $(0, 0)$ pontban?

4. Folytonos-e, differenciálható-e az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény a $(0, 0)$ pontban?

5. Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Igazoljuk, hogy az f függvény parciális deriváltjai mindenütt léteznek, f differenciálható a $(0, 0)$ pontban, de az első változó szerinti parciálisderivált-függvény nem folytonos a $(0, 0)$ pontban.

- Érintősík: önálló munka során a 8.131, 8.132 feladatokkal foglalkoztunk.
- HF: ami kimaradt az önálló munka során.