Többváltozós analízis 1. gyakorlat

4. csoport, szerda 14–16

1. gyakorlat (szeptember 13.)

- A gyakorlaton emlékeztettem az improprius integrál motivációjára, továbbá arra, hogy mit jelent, hogy egy f függvény $[a, b)$-n vett improprius integrálja konvergens. Közösen megoldottuk az 5.223 feladatot.
- Önálló munka során az 5.220 és 5.224–5.238 feladatokkal foglalkoztunk, közben megbeszéltük a nevezetes integrálási szabályokat.
- HF: ami kimaradt az önálló munka során.

2. gyakorlat (szeptember 27.)

- HF-ok megbeszélése: 5.220, 5.229, 5.236.
- Önálló munka során (az előző órán felírt) két példatárban nem szereplő feladattal foglalkoztunk:
  1. Igazoljuk, hogy ha az f, g függvények a $(0, 1]$-en lokálisan integrálhatóak és $\int_0^1 f$, $\int_0^1 g$ integrálok konvergensek, akkor $\int_0^1 (f + g)$ is konvergens.
  2. Mi a logikai kapcsolat a $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ függvényhatárérték és az $\int_1^\infty f$ improprius integrál között?
- Emlékeztettem a majorizációs/minorizációs elvre, ahol HF meggondolni, hogy a feltételben szereplő abszolútérték nem hagyható el.
- A majorizációs/minorizációs elvet alkalmazva a következő feladatokat mutattam meg a táblánál: 5.239 és $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$.
- Önálló munka során az 5.240, 5.242, 5.244, 5.245 feladatokkal foglalkoztunk.
- HF: ami kimaradt az önálló munka során.

3. gyakorlat (október 4.)

- röpZH.

- HF-ok megbeszélése: előző órai 2. ellenpélda, 5.250, 5.244.
- A gyakorlaton emlékeztettem a sorok konvergenciájára vonatkozó integrálkritériumra, ezt követően a következő két feladatot oldottuk meg: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$.
- Emlékeztettem a hatványsorokra vonatkozó legfontosabb definíciókra (hatványsor, konvergencia-halmaz, összegfüggvény).
- A 7.45-ös feladatban kétféleképpen is meghatároztuk a konvergenciahalmazt, önálló munka során a 7.49, 7.50, 7.52 feladatokkal foglalkoztunk.
- A 7.70 feladatban meghatároztuk az összegfüggvényt, önálló munka során a 7.71, 7.72 és 7.75 feladatokkal foglalkoztunk (ahol utóbbi kettőhöz azt a segítséget adtam, hogy emlékezzünk, hogy hogyan írtuk fel előadáson a $\log(1 + x)$ függvényt hatványsor alakban).
- HF: ami kimaradt az önálló munka során.

4. gyakorlat (október 11.)

- röpZH.
- HF-ok megbeszélése: 7.71, 7.75.
- Sokadik deriváltra vonatkozó feladatokat oldottunk meg: 7.116 (háromféleképpen), 7.117.
- HF: 7.118 (sokadik derivált), 7.106–110 (elmélet), 7.125.

5. gyakorlat (október 18.)

- Önálló munka során a következő feladatokkal foglalkoztunk: $B(a, r)$ felírása abszolútérték nélkül $\mathbb{R}$-ben és $\mathbb{R}^2$-ben; $(\sin n\pi, \cos n\pi)$ konvergens-e? $(\cos n, \sin n)$ tarthat-e a $(0, 0)$-hoz? határérték és műveletek (összeg, skalárszoros, skalárszorzat) kapcsolata; $a_n \to a$ és $|a_n| \to |a|$ kapcsolata?
- A következő feladatokat beszéltük meg a táblánál: $(\sin n\pi, \cos n\pi)$ konvergens-e? $(\cos n, \sin n)$ tarthat-e a $(0, 0)$-hoz? határérték és műveletek (összeg, skalárszoros, skalárszorzat) kapcsolata; $a_n \to a$ és $|a_n| \to |a|$ kapcsolata?

6. gyakorlat (október 25.)

- 1. ZH.

7. gyakorlat (november 8.)

- 1. ZH megbeszélése.
- A 8.6-os feladatot beszéltük meg a táblánál, önálló munka során a következő feladatokkal foglalkoztunk: 8.17, 8.7, 8.10, 8.25, 8.26.
- Egyéb feladatokkal is foglalkoztunk:

  1. Az $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ és $B = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ számhalmazok belső, külső, határpontjai, torlódási pontjai, nyíltsága, zártsága.
  2. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{int}H$, $\mathrm{ext}H$ nyílt, ∂H zárt tetszőleges H halmaz esetén.
  3. Lehet-e végtelen sok nyílt halmaz metszete nem nyílt? Lehet-e végtelen sok zárt halmaz uniója nem zárt?

- HF: ami kimaradt az önálló munka során.

8. gyakorlat (november 15.)

- röpZH.
- HF-ok megbeszélése: 8.26 és egyéb feladatok közül 1.
- Szintvonalak: a 8.43 és 8.45 feladatokat beszéltük meg, önálló munka során a 8.47 és 8.49 feladatokkal foglalkoztunk.
- Függvényhatárérték és folytonosság: önálló munka során a 8.68, 8.76, 8.79, 8.83, 8.81 és $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ feladatokkal foglalkoztunk.
- HF: ami kimaradt az önálló munka során.

9. gyakorlat (november 22.)

- HF-ok megbeszélése: 8.76.
- Parciális deriválás: a 8.88-as feladatot beszéltük meg a táblánál, önálló munka során a 8.93, 8.96, 8.102 feladatokkal foglalkoztunk.
- Logika és parciális derivált: önálló munka során a 8.103, 8.104 feladatokkal foglalkoztunk.
- Szélsőérték-feladatok: önálló munka során az előadáson tárgyalt $xy(1-x^2-y^2)$ a zártegységkörlapon, 8.157, $\sin x \sin y \sin z$ legnagyobb értéke, ha x,y,z egy háromszög szögei feladatokkal foglalkoztunk.
- HF: ami kimaradt az önálló munka során.

10. gyakorlat (november 29.)

- röpZH.
- HF-ok megbeszélése: $\sin x \sin y \sin z$ legnagyobb értéke, ha x,y,z egy háromszög szögei.
- Totális derivált: a következő feladatokkal foglalkoztunk (1–3. megbeszélve):

  1. Differenciálható-e az $f(x,y) = x + 2y$ függvény a $(2,1)$ pontban?
  2. Differenciálható-e az $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ függvény a $(0,0)$ pontban?
  3. Differenciálható-e az
  $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+2y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$
  függvény a $(0,0)$ pontban?
  4. Folytonos-e, differenciálható-e az
  $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$
  függvény a $(0,0)$ pontban?
  5. Legyen
  $$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$
  Igazoljuk, hogy az f függvény parciális deriváltjai mindenütt léteznek, f differenciálható a $(0,0)$ pontban, de az első változó szerinti parciálisderivált-függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

- Érintősík: önálló munka során a 8.131, 8.132 feladatokkal foglalkoztunk.
- HF: ami kimaradt az önálló munka során.